

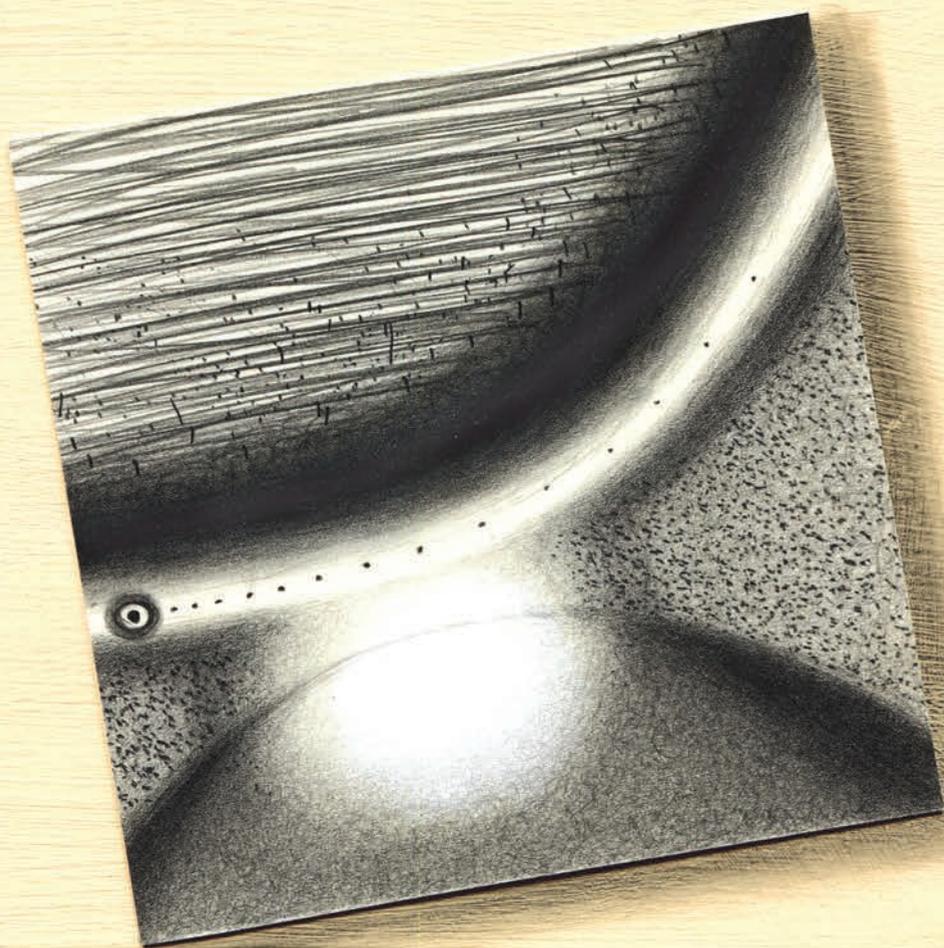
СЕНТЯБРЬ

ISSN 0130-2221

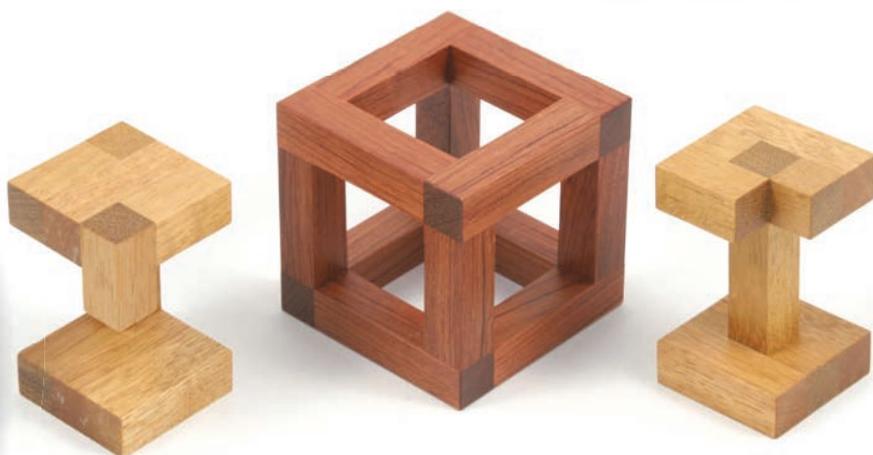
2018 · № 9

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ



# ЗРИТЕЛЬНЫЙ ОБМАН



На фотографии – составные части головоломки японского изобретателя Осанори Ямамото (*Osanori Yamamoto*). Задача – упаковать две светлые детали в куб так, чтобы ничего не торчало наружу.

На первый взгляд может показаться, что это невозможно: левая деталь выглядит так, что ее нельзя уместить в этот куб. Да и вообще вся фотография чем-то напоминает гравюры Эшера и других художников, которые рисовали невозможные объекты.

Но здесь все возможно, просто ракурс фото специально так подобран. На самом деле левая деталь склеена из четырех брусочков: два размером  $3 \times 3 \times 1$  расположены один над другим и соединены «ножкой»  $1 \times 1 \times 3$ , которая приклеена к угловым квадратикам этих брусочков. К верхнему из них приклеен кубик  $1 \times 1 \times 1$  – напротив «ножки» (из-за него и создается иллюзия на фото). Устройство правой детали хорошо видно: ножка приклеена к центрам верхнего и нижнего брусочков.

Эта головоломка участвовала в конкурсе 38-го съезда любителей головоломок, который проходил в августе в Сан-Диего. Она была высоко оценена участниками съезда. Желаем удачи в ее решении.

*Е.Епифанов*

# КВАНТ

СЕНТЯБРЬ 2018

№9

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:

УЧРЕДИТЕЛИ

Российская академия наук  
Математический институт  
им. В.А.Стеклова РАН  
Физический институт  
им. П.Н.Лебедева РАН

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**А.А.Гайфуллин**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ

**Н.Н.Андреев, Л.К.Белопухов,  
М.Н.Бондаров, Ю.М.Брук,  
А.А.Варламов, С.Д.Варламов,  
А.П.Веселов, А.Н.Виленкин, В.И.Голубев,  
Н.П.Долбилин, С.А.Дориченко,  
В.Н.Дубровский, А.А.Заславский,  
А.Я.Канель-Белов, П.А.Кожевников  
(заместитель главного редактора),  
С.П.Коновалов, К.П.Кохась, А.А.Леонович,  
Ю.П.Лысов, А.Б.Минеев, В.В.Произволов,  
В.Ю.Протасов, А.М.Райгородский,  
Н.Х.Розов, А.Б.Сосинский,  
А.Л.Стасенко, В.Г.Сурдин,  
В.М.Тихомиров, В.А.Тихомирова,  
А.В.Устинов, А.И.Черноуцан  
(заместитель главного редактора)**

РЕДАКЦИОННЫЙ СОВЕТ

**А.В.Анджанс, М.И.Башмаков, В.И.Берник,  
В.Г.Болтянский, А.А.Боровой, В.В.Козлов,  
Н.Н.Константинов, Г.Л.Коткин,  
С.П.Новиков, А.Л.Семенов,  
С.К.Смирнов, А.Р.Хохлов**

РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
1970 ГОДА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР

**И.К.Кикоин**

ПЕРВЫЙ ЗАМЕСТИТЕЛЬ  
ГЛАВНОГО РЕДАКТОРА

**А.Н.Колмогоров**

**Л.А.Арцимович, М.И.Башмаков, В.Г.Болтянский,  
И.Н.Бронштейн, Н.Б.Васильев, И.Ф.Гинзбург,  
В.Г.Зубов, П.Л.Капица, В.А.Кириллин,  
Г.И.Косоуров, В.А.Лешковцев, В.П.Лишевский,  
А.И. Маркушевич, М.Д.Миллионщиков,  
Н.А.Патрикеева, Н.Х.Розов, А.П.Савин,  
И.Ш.Слободецкий, М.Л.Смолянский,  
Я.А.Сморodinский, В.А.Фабрикант, Я.Е.Шнайдер**

- 2 Визитер – 100 лет назад. *С.Варламов*  
9 Сколько деревьев в графе. *А.Петрунин*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

- 14 Человек-легенда XX века. *Л.Белопухов*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

- 19 Задачи М2526–М2529, Ф2533–Ф2536  
20 Решения задач М2500, М2514–М2517,  
Ф2521–Ф2524

ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

- 29 Движение тел в гравитационном поле.  
*Б.Мукушев*

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

- 33 Задачи  
34 Лазерная локация. *С.Дворянинов*

КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

- 35 Задачи 1–4

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

- 36 Формула Пика и тающий лед. *Г.Мерзон*

ОЛИМПИАДЫ

- 38 XXV Международная олимпиада «Туймаада».  
Физика

НАМ ПИШУТ

- 40 Неравенства для элементов треугольника.  
*В.Дроздов*

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЕ МАТЕРИАЛЫ

- 41 ЕГЭ по физике

НАШИ НАБЛЮДЕНИЯ

- 49 Я к вам травую прорасту. *В.Птушенко*  
51 Ответы, указания, решения  
«Квант» улыбается (35)

НА ОБЛОЖКЕ

- I *Иллюстрация к статье С.Варламова*  
II *Коллекция головоломок*  
III *Шахматная страничка*  
IV *Прогрулки с физикой*

# Визитер – 110 лет назад

*С.ВАРЛАМОВ*

**В**ИСТОРИИ НАШЕЙ ПЛАНЕТЫ БЫЛО много катастрофических для населявших ее существ событий. Некоторые из них оставили неизгладимые следы на поверхности Земли, другие никаких следов не оставили. Несколько крупных следов можно обнаружить, только посмотрев на Землю с космической орбиты, настолько велики их масштабы. Изредка происходят события, когда большой катастрофы Земле удастся избежать, а оставленные следы не позволяют узнать, что за причина привела к их появлению. Например, до сих пор ведутся споры по поводу того, что представлял собой Тунгусский метеорит, который «прошелся» над землей 110 лет назад, а именно 30 июня 1908 года. Не будем перечислять и рассматривать все версии, выдвигавшиеся для объяснения того, что произошло в тот день.

Давайте предположим, что это был визитер, который «прошил» атмосферу Земли и, не ударившись о поверхность, улетел обратно в Космос. Поскольку никаких

частичек вещества метеорита не было обнаружено, будем считать, что он был сплошным железным и (для упрощения расчетов) имел форму куба, который в полете не вращался. Оценим минимальный размер такого гипотетического железного метеорита.

Положим, что до пролета над Землей метеорит принадлежал Солнечной системе (после пролета тоже принадлежал ей и, по-видимому, принадлежит до сих пор). Какая энергия выделилась в воздухе во время такого визита (попробуем выразить ее в тротиловом эквиваленте)? Насколько поднималась температура воздуха перед метеоритом? Почему очевидцы (те, кто видел и слышал, что тогда происходило) утверждали, что было два сильных взрыва, и как это можно объяснить? Вопросов про такую гипотезу можно придумать много, но давайте пока ограничимся уже сформулированными.

Скорость такого визитера на выходе из атмосферы Земли должна быть больше второй космической скорости  $v_2$  от Земли  $= \sqrt{2gR_{\text{Земли}}} = 11 \text{ км/с}$ . А вот какую максимальную относительную скорость могли иметь метеорит и Земля до встречи, когда находились далеко друг от друга? Земля вращается по почти круговой орбите радиусом около 150 млн км вокруг Солнца, делая один оборот за год. Это соответствует скорости, равной по величине примерно 30 км/с. Если же скорость мгновенно, «по волшебству», увеличится в  $\sqrt{2}$  раз, то Земля получит вторую космическую скорость и навсегда

DOI: <https://doi.org/10.4213/kvant20180901>



**ФАКТ НА АИФ.РУ**

**НА 1970 ГОД УЧЁНЫЕ ЗАФИКСИРОВАЛИ 77 РАЗЛИЧНЫХ ТЕОРИЙ О ПРИРОДЕ «ТУНГУССКОГО ФЕНОМЕНА»**

улетит от Солнца по траектории, имеющей форму параболы. Так как мы предположили, что метеорит до встречи с Землей принадлежал Солнечной системе, то это означает, что скорость метеорита на том же расстоянии от Солнца, на котором находится Земля, не могла быть больше этой второй космической скорости, т.е. больше  $v_2$  от Солнца  $= \sqrt{2} \cdot 30 \text{ км/с} \approx 42,4 \text{ км/с}$ . Следовательно, максимальная относительная скорость планеты и космического тела, когда они находились на большом расстоянии друг от друга, была не больше  $72,4 \text{ км/с}$ . За счет притяжения к Земле до входа в ее атмосферу метеорит приобретет дополнительную скорость, и на входе в атмосферу его максимальная скорость может быть равной  $v_0 = \sqrt{11^2 + 72,4^2} \text{ км/с} \approx 73 \text{ км/с}$ . Понятно, что это оценка по максимуму, а на самом деле (и скорее всего) скорость метеорита была раза в два меньше.

Механика движения симметричного твердого тела (не самолета или вертолета) весьма проста. При полете в воздухе, который до взаимодействия можно считать покоившимся, метеорит сообщает воздуху скорость порядка своей собственной. Сжимаемый перед метеоритом воздух разогревается, светится, и на это тратится кинетическая энергия метеорита. Масса воздуха, «заметенная» поперечным сечением метеорита, пропорциональна эффективной длине полета в атмосфере, которую для первоначальной грубой оценки размеров метеорита можно считать одинаково плотной на всех высотах. Предположим, что траектория полета метеорита в атмосфере мало отличается от прямой линии. Силой притяжения Земли, действующей во время полета метеорита в атмосфере в направлении, перпендикулярном скорости, сначала пренебрежем, а затем оценим вызванное ею изменение скорости.

Модель атмосферы с одинаковой по всей своей высоте плотностью  $\rho_{\text{возд}} = 1,2 \text{ кг/м}^3$  дает высоту атмосферы  $h = 8 \text{ км}$  ( $h = p_{\text{атм}} / (g\rho_{\text{возд}})$ ). А длина траектории метеорита, слегка коснувшегося поверхности Земли, в такой атмосфере состав-

ляет

$$L = 2\sqrt{(R_{\text{Земли}} + h)^2 - R_{\text{Земли}}^2} \approx \sqrt{8R_{\text{Земли}}h} = \sqrt{\frac{8R_{\text{Земли}}p_{\text{атм}}}{g\rho_{\text{возд}}}} = \sqrt{\frac{8R_{\text{Земли}}RT}{gM}} \approx 640 \text{ км}.$$

Здесь  $R$  – универсальная газовая постоянная,  $T$  – средняя температура воздуха вблизи поверхности Земли,  $M$  – это средняя молярная масса воздуха. Давление на поверхности и плотность воздуха вблизи поверхности пропорциональны друг другу, поэтому эффективная длина определяется размером Земли и отношением  $RT/M$ .

Упрощенное уравнение движения метеорита с учетом сопротивления воздуха, который приобретает такую же скорость, какую до взаимодействия с воздухом имел метеорит, можно записать в виде

$$mdv = -vdt \cdot S\rho v, \text{ или } \frac{dv}{v} = -\frac{dm}{m}.$$

Здесь  $dm$  – это масса воздуха, вовлеченного в движение метеоритом за короткое время  $dt$ . Решение этого уравнения таково, что скорость убывает с ростом массы воздуха, которую метеорит вовлек в движение, по экспоненциальному закону. Это означает, что отношение скорости  $v_0$  на входе в атмосферу к скорости  $v_1$  в момент, когда метеорит почти коснулся поверхности Земли, равно отношению скорости  $v_1$  ко второй космической скорости (нужной для покидания навсегда Земли), т.е. к  $v_2 = 11 \text{ км/с}$ . Оценка сверху дает такую величину скорости  $v_1$ :

$$v_1 = \sqrt{v_0 v_2} \approx 28 \text{ км/с}.$$

Следовательно, время пребывания метеорита в плотной атмосфере равно по порядку величины 30–40 секундам. За такое время изменение скорости метеорита в направлении к центру Земли, связанное с притяжением Земли, составит всего 300–400 м/с. Как видно, эта величина значительно меньше даже второй космической скорости, не говоря уже о скорости визитера при входе в атмосферу.

Считая метеорит сплошным железным с плотностью  $\rho_{\text{железа}} = 7800 \text{ кг/м}^3$ , оценим

размер  $A$  ребра железного куба:

$$\ln \frac{v_0}{v_2} = \frac{LA^2 \rho_{\text{возд}}}{A^3 \rho_{\text{железа}}}, \text{ и } A = 52 \text{ м.}$$

Для вдвое меньшей относительной скорости тел на большом расстоянии до встречи размер ребра куба, согласно оценке, будет больше:  $A_1 = 82$  м.

Поскольку кинетическая энергия метеорита уменьшилась, то изменение энергии метеорита равно выделившейся в атмосфере Земли энергии:

$$|\Delta E_{\text{кин}}| = A^3 \rho_{\text{железа}} \left( \frac{v_0^2}{2} - \frac{v_2^2}{2} \right) \approx 2,8 \cdot 10^{18} \text{ Дж.}$$

Для вдвое меньшей относительной скорости наших тел до их встречи выделившаяся энергия будет немного меньше:  $|\Delta E_{1\text{кин}}| \approx 2,6 \cdot 10^{18} \text{ Дж.}$

Если время пролета метеорита через атмосферу порядка 40 секунд, то средняя за время пролета мощность, выделившаяся в воздухе, была  $7 \cdot 10^{16}$  Вт. При этом мощность менялась со временем, так как изменялись и скорость метеорита и плотность воздуха, сквозь который он летел. Поскольку при взрыве 1 килограмма тротила (тринитротолуола) выделяется 4,5 МДж энергии, то выделенная метеоритом энергия эквивалентна взрыву 620 мегатонн тротила. Эта величина в 10 раз больше энергии, выделившейся при взрыве над Новой Землей 30 октября 1961 года термоядерной супербомбы, которая приобрела неофициальное название «Кузькина мать». При ее взрыве выделилась энергия, эквивалентная взрыву 58,6 мегатонн тротила.

Земле во время встречи с Тунгусским метеоритом, в соответствии с рассматриваемой версией события, повезло в том отношении, что метеорит пролетел через атмосферу на минимальной высоте примерно 8–10 км, т.е. он не касался поверхности Земли. На такой высоте среднее давление атмосферы примерно в четыре раза меньше давления вблизи поверхности. Поэтому для такого пролета минимальный размер метеорита может быть во столько же

раз меньше, а именно  $A/4 = 13$  м. И выделившаяся энергия тоже меньше: она эквивалентна энергии взрыва 10 мегатонн тротила. Эта величина в 6 раз меньше энергии, выделившейся при взрыве «Кузькиной матери». Средняя мощность, выделенная в воздухе во время такого пролета, равна примерно  $10^{15}$  Вт.

Для более точной оценки массы метеорита, касающегося поверхности Земли, примем, что атмосфера не одинаково плотная, а «изотермическая». Эта модель атмосферы, конечно же, ближе к истине, чем модель атмосферы с одинаковой плотностью воздуха на всех высотах. Высота  $h$  метеорита над поверхностью выражается через расстояние  $x$  от точки касания поверхности формулой  $h = x^2 / (2R_{\text{Земли}})$ . В «изотермической» атмосфере плотность воздуха с высотой меняется по закону  $\rho_h = \rho_0 \cdot \exp(-Mgh/(RT))$ . Тогда масса воздуха, вовлеченного в движение метеоритом, будет равна

$$m = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0 A^2 dx \cdot \exp\left(-\frac{Mgx^2}{2R_{\text{Земли}}RT}\right) = \rho_0 A^2 \sqrt{\frac{2R_{\text{Земли}}RT}{Mg}}.$$

Расчеты показывают, что в этом случае эффективная длина траектории метеорита в атмосфере будет меньше, а именно

$$L \approx 335 \text{ км.}$$

В итоге формула для нахождения минимальных размеров метеорита, почти коснувшегося поверхности Земли, приобретает вид

$$A = \frac{\rho_{\text{возд}}}{\rho_{\text{железа}}} \frac{1}{\ln\left(\frac{v_0}{v_2}\right)} \sqrt{\frac{2R_{\text{Земли}}RT}{Mg}} \approx 27 \text{ м.}$$

А с учетом того, что Тунгусский метеорит пролетел над поверхностью на минимальной высоте порядка 10 км, размер метеорита (оценка) будет еще меньше:  $\approx 7$  м.

Грубая оценка в 13 м и более точная оценка в 7 м для размеров Тунгусского метеорита – это все-таки величины одного порядка (порядка 10 метров).

Одним из самых известных свидетельств очевидцев Тунгусского метеорита является сообщение Семена Семенова, жителя поселка Ванавара, находившегося в 70 км на юго-востоке от эпицентра взрыва:

*«... Вдруг на севере небо раздвоилось, и в нем широко и высоко над лесом появился огонь, который охватил всю северную часть неба. В этот момент мне стало так горячо, словно на мне загорелась рубашка. Я хотел разорвать и сбросить с себя рубашку, но небо захлопнулось и раздался сильный удар. Меня сбросило с крыльца сажени на три. После удара пошел такой стук, словно с неба падали камни или стреляли из пушек, земля дрожала, и когда я лежал на земле, то прижимал голову, опасаясь, чтобы камни не проломили голову. В тот момент, когда раскрылось небо, с севера пронесся горячий ветер, как из пушки, который оставил на земле следы в виде дорожек. Потом оказалось, что многие стекла в окнах выбиты, а у амбара переломило железную закладку для замка двери»* («Знание–сила», 2003, №6).

Желательно дать объяснение наблюдавшимся явлениям.

Понятно, что метеорит, «сгребая» перед собой воздух, заставляет его сжаться и разогреться. В результате молекулы воздуха диссоциируют на атомы, а затем атомы ионизируются. Возникшая горячая плазма светит во все стороны. Для оценки температуры плазмы, в которую метеорит превратил воздух перед собой, нужно учесть, что воздух в основном состоит из двухатомных молекул азота. Сначала мы предположим, что потеря на излучение нет и вся потерянная метеоритом энергия идет на разогрев и ионизацию воздуха. Это позволит оценить максимальную (теоретически) температуру возникшей плазмы.

В системе отсчета, связанной с метеоритом, воздух движется со скоростью  $v$ , которая во много раз больше тепловых скоростей движения молекул в воздухе ( $\sim 500$  м/с), и тормозится до упорядоченной скорости, равной нулю. При этом вся кинетическая энергия порции воздуха  $dmv^2/2$  преобразуется в его тепловую энер-

гию. Сжатый и разогревшийся воздух расходуется от метеорита в стороны со скоростью, которая во много раз меньше скорости метеорита (она будет определяться температурой, до которой воздух нагрелся). А навстречу метеориту на смену ушедшим поступают новые порции воздуха.

Если рассматривать движение в системе отсчета, в которой атмосфера покоится, то нагретый воздух со своей внутренней энергией  $dmv^2/2$  будет иметь еще и такую же по величине энергию упорядоченного движения. Таким образом, кинетическая энергия метеорита при «обслуживании» небольшой массы воздуха  $dm$  уменьшится на величину  $dmv^2$ . Максимальное давление перед метеоритом будет вблизи поверхности Земли, и его оценка – это произведение плотности воздуха на квадрат скорости метеорита в этом месте. Для рассмотренного случая эта величина примерно равна  $10^9$  Па, что соответствует пределу прочности железа, т.е. метеорит не развалится на части, а останется сплошным куском железа.

Энергия одной молекулы азота, движущейся со скоростью 73 км/с (в системе отсчета метеорита), равна 746 эВ; энергия диссоциации одной молекулы азота – 9,8 эВ; энергия однократной ионизации атома азота – 14,5 эВ. Для отрыва электрона от однократно ионизованного атома азота требуется 29,6 эВ; для отрыва электрона от дважды ионизованного атома азота нужно 47,5 эВ. После диссоциации молекулы и трех актов ионизации атомов азота из одной молекулы азота получается 8 частиц: 2 иона азота и 6 электронов. На одну образовавшуюся частицу (на один ион или один электрон) после перечисленных актов ионизации остается в среднем энергия 71 эВ. А для того чтобы оторвать еще и четвертый электрон от трехкратно ионизованного атома азота требуется уже энергия 77,5 эВ, т.е. на третьем электроном ионизация атомов прекратится. В результате максимально возможная (теоретически) температура образовавшейся плазмы, в которой все частицы имеют энергию  $3kT/2$ , связанную с поступательным движением, равна примерно  $540 \cdot 10^3$  К (это

на входе метеорита в атмосферу). В самой ближней к поверхности Земли точке траектории метеорита, когда каждая молекула азота имеет перед встречей с метеоритом (в системе отсчета метеорита) энергию в несколько раз меньшую:  $\sim 110$  эВ, воздух перед метеоритом тоже превратится в плазму, хотя процесс ионизации остановится на числе 1, а на каждую образовавшуюся частицу (два иона и два электрона) останется энергия примерно в 18 эВ. Это соответствует теоретическому максимуму температуры порядка  $140 \cdot 10^3$  К. И даже на выходе метеорита из атмосферы энергия молекул азота в системе отсчета метеорита равна приблизительно 16 эВ, что после диссоциации молекул на атомы соответствует максимальной (теоретически) температуре порядка  $20 \cdot 10^3$  К.

Это, естественно, сильно завышенные оценки, так как в приведенном расчете предполагалось, что вся энергия пошла на ионизацию и нагрев вещества. На самом деле энергия будет очень быстро «высвечиваться» в окружающее пространство в виде излучения. А так как воздух прозрачен, в излучение будет переходить энергия вещества вплоть до того момента, когда вещество охладится до температуры порядка  $10^4$  К. При отличии теоретического максимума температуры от этого значения во много раз можно считать, что минимум половина потерянной метеоритом энергии на первом этапе переходит в излучение. А уже затем излучение, поглощенное предметами на земле, превращается в энергию звуковых ударных волн и через некоторое время переходит в тепловую энергию.

Будем для грубой оценки считать, что в любом месте траектории метеорита практически вся кинетическая энергия, потерянная им, сначала превращается в излучение. Для получения оценочной зависимости мощности излучения от расстояния  $x$  по горизонтали от точки, в которой расстояние между метеоритом и поверхностью Земли самое маленькое, придется учитывать зависимость плотности воздуха от высоты. Рассмотрим ситуацию, когда кубический метеорит из железа с размером ребра куба  $A = 11$  м влетает в атмосферу со

скоростью 73 км/с, «прошивает» ее, приблизившись к поверхности Земли на минимальное расстояние 10 км, и вылетает из атмосферы, имея скорость 12,56 км/с, немного превышающую вторую космическую скорость относительно Земли. Тогда

$$\ln \frac{v_0}{v_x} = \frac{\rho_{\text{возд. на высоте 10 км}}}{A \rho_{\text{железа}}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} dx \cdot \exp\left(-\frac{Mgx^2}{2R_{\text{Земли}}RT}\right) = 18,9 \int_{-\infty}^{+\infty} dy \cdot \exp(-507,6y^2),$$

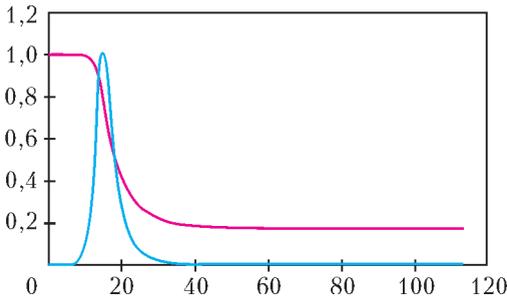
где  $y = \frac{x}{R_{\text{Земли}}}$ .

Мощность потерь энергии метеоритом (примерно равная мощности излучения) зависит от этого расстояния  $x$  следующим образом:

$$W_x = A^2 v_x^3 \rho_{\text{возд. на высоте 10 км}} \cdot \exp(-507,6y^2).$$

Для получения этой зависимости придется воспользоваться численными методами (т.е. компьютером). Поскольку при полете самолета на высоте 10 км обычно командир корабля сообщает пассажирам, что температура за бортом минус 50 градусов (по Цельсию), то в формулу для коэффициента при  $y^2$  в выражении для экспоненты была подставлена температура  $T = 220$  К. Соответствующий коэффициент при переменной  $y$  равен  $-507,6$ .

Согласно проведенным расчетам, скорость метеорита уменьшилась всего на 0,1% по сравнению с  $v_0$  на расстоянии примерно  $0,1R_{\text{Земли}}$  от точки максимального сближения с поверхностью. Чтобы уменьшить объем вычислений, начнем расчеты с момента, когда это расстояние составляет  $0,2R_{\text{Земли}}$ , и закончим в тот момент, когда это расстояние будет таким же, но метеорит будет находиться с противоположной стороны от точки максимального сближения. На приведенном здесь графике представлена вычисленная зависимость  $v_t/v_0$  метеорита от времени (красный цвет) и зависимость мощности потерь



кинетической энергии метеоритом (в относительных единицах) от времени (синий цвет). На преодоление этого участка траектории длиной  $0,4R_{\text{Земли}} \approx 2560$  км метеориту потребовалось всего 113 с. При этом заметные потери энергии происходят в течение всего 15 с. Моменту времени 20 с на графике соответствует минимальное расстояние от метеорита до поверхности Земли (10 км). Максимум мощности потерь достигается при расстоянии метеорита по горизонтали от точки наибольшего сближения с поверхностью Земли, равном 225 км. Более 90% от максимальной мощности достигается в диапазоне расстояний от 287 до 164 км, здесь скорость метеорита падает от 87 до 69,5% от  $v_0$ . Этот участок пути длиной приблизительно 120 км метеорит проходит всего за 2,2 с. При этом максимальная мощность потерь энергии равна

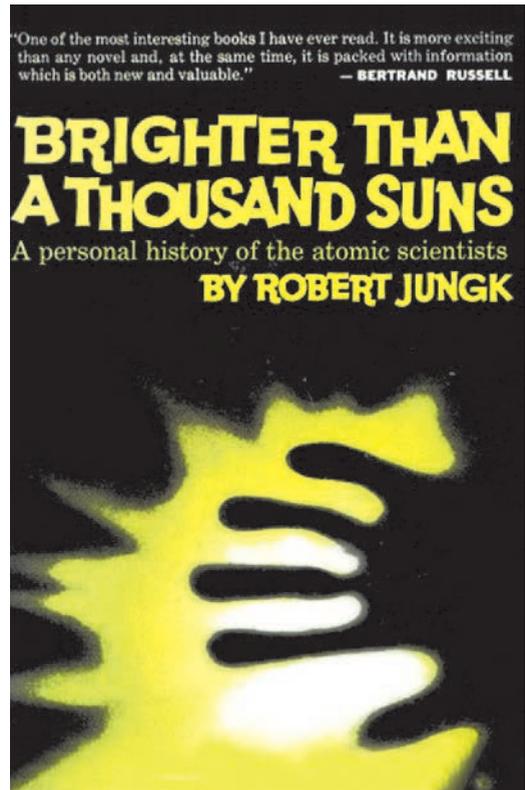
$$0,266A^2v_0^3\rho_{\text{возд. на высоте 10 км}} = 3,7 \cdot 10^{15} \text{ Вт.}$$

Поскольку для Тунгусского метеорита «площадь поражения» на поверхности Земли составила около  $2000 \text{ км}^2$ , то это означает, что поперечные размеры этого участка равны примерно  $40 \times 50$  км. По-видимому, максимальные разрушения на поверхности Земли произошли под небольшим участком траектории метеорита, где мощность потерь была максимальной. Там выделилась максимальная доля потерянной метеоритом кинетической энергии, там и возникли пожары, и был повален лес.

Обозначим через  $h$  высоту метеорита над поверхностью Земли. Если разделить мощность потерь на  $4\pi h^2$ , то получится мощность, приходящаяся на единицу площади

поверхности в точке непосредственно под метеоритом. Например, в тот момент, когда мощность потерь самая большая, высота  $h$  равна примерно 14 км. А соответствующая мощность на единицу площади составляет  $1,5 \text{ МВт/м}^2$ . Эта величина в тысячу больше мощности солнечного излучения  $1,37 \text{ кВт/м}^2$ , падающего на площадку размером  $1 \text{ м}^2$ , расположенную перпендикулярно солнечным лучам вне атмосферы Земли. Недаром одна из книг, посвященная истории создания ядерного оружия, названа автором «Ярче тысячи Солнц».

Вот почему под теми участками траектории метеорита, где выделялась заметная доля максимальной мощности, возникли сплошные пожары. Ведь за несколько секунд облучения вещество поверхности (листья и хвоя деревьев тайги – летом все зеленое) разогреются до температуры возгорания. Излучение было настолько интенсивным, что обычно голубое дневное небо стало огненным. Плазма, в которую превратился воздух, излучает не только в



видимом диапазоне длин волн, но и в ультрафиолете. Это приводит к тому, что свет может многократно «перехватываться» молекулами и атомами воздуха и вновь излучаться. А у азота и у кислорода есть линии поглощения и излучения, находящиеся в видимом диапазоне длин волн. Поэтому все небо, которое видели наблюдатели во время Тунгусского события, было огненным.

Поскольку воздух возле сильно прогретой поверхности быстро нагревается, то это сопровождается ростом давления, причем давление растет еще и потому, что испаряющееся вещество участков поверхности увеличивает концентрацию частиц, создающих давление. Это происходит практически одновременно с ярким освещением поверхности, поэтому возникает резкое повышение давления. Таким образом, первый удар грома связан с излучением, которое распространяется со скоростью света. Нагрев зависит от угла падения лучей на поверхность, поэтому давление падало в направлении от места, где яркость освещения была максимальной. Это вызвало ветер – воздух «разбегался» от очага нагрева. А когда к участку поверхности, на котором находился очевидец, приходили ударные волны от тех участков воздуха, через которые пролетел метеорит, то человек слышал второй удар грома. Вот почему наблюдатели-очевидцы говорили, что одежда на них так сильно разогревалась, что обжигала кожу, и что было два разнесенных по времени взрыва. Для каждого наблюдателя, где бы он ни находился, второй удар воспринимается как взрыв, потому что скорость метеорита значительно больше скорости распространения звуковых волн (даже ударных) в воздухе. С минимальной задержкой по времени к наблюдателю приходит звуковая волна от самого ближнего к нему места траектории метеорита, а затем приходят звуки от более далеких участков траектории полета. При минимальном расстоянии 10 км задержка составит примерно 20–30 с, а во всех остальных случаях она будет больше.

Каждый наблюдательный человек во время грозы с ударами молний испытывает те же самые ощущения, когда к нему приходят звуковые волны от разных участков в воздухе, через которые прошла молния. Если молния ударила далеко от места наблюдателя, то ему слышны продолжительные раскаты грома, приходящие с задержкой после яркой световой вспышки. А вот если молния ударила в расположенный рядом с наблюдателем столб или дерево, то звуковой удар получается резким и очень громким. И звуки, приходящие после первого удара, уже воспринимаются как слабые, т.е. никаких продолжительных «раскатов грома» не возникает.

Как и во время испытаний ядерного оружия, в частности «супербомбы» над Новой Землей, при пролете метеорита прогретый воздух вместе с продуктами горения на земле поднялся на высоту более 90 км. Его разнесло ветрами в разные стороны, и в течение нескольких суток наблюдались облака, светящиеся на больших высотах порядка 80 км. «Белые ночи» в северном полушарии после пролета Тунгусского метеорита были не только в своих традиционных местах (на широтах больше 60°), но и значительно южнее.

В заключение нужно отметить, что в рассмотренной модели явления тело метеорита считалось симметричным. Но для сравнительно небольшого космического тела это вовсе не обязательное условие. Можно, например, вспомнить свое детское развлечение – бросание плоских камешков на поверхность воды. При удачном броске камешек совершает несколько прыжков по воде. Нечто подобное могло иметь место и в случае Тунгусского метеорита, только «прыжок» при ударе об атмосферу был всего один.

# Сколько деревьев в графе

А. ПЕТРУНИН

## Графы и их остовные деревья

Рассмотрим план шести ежедневных рейсов некоторой авиакомпании между некоторыми парами из аэропортов  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , показанный на рисунке 1. Для формализа-

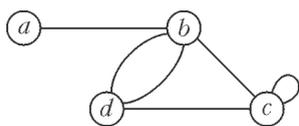


Рис. 1

ции такой и многих других ситуаций в математике используется понятие *граф*.

Граф – это конечный и не пустой набор *вершин* и конечный набор *ребер*, каждое из которых соединяет пару вершин. В нашем примере вершина графа – это аэропорт, а ребро – это рейс авиакомпании. Пара вершин графа может быть соединена несколькими ребрами (это может означать, что авиакомпания совершает несколько рейсов в день). Также ребро может соединять вершину с самой собой; в этом случае оно называется *петлей* (про такое ребро можно думать, как про прогулочный рейс авиакомпании).

Иначе говоря, с математической точки зрения, на рисунке 1 мы видим граф с четырьмя вершинами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$ , шестью ребрами, из них одно ребро – петля при вершине  $c$  и пара ребер соединяет  $b$  с  $d$ . Число ребер, исходящих из данной вершины, называется ее *степенью*, при этом петли считаются дважды; степени вершин  $a$ ,  $b$ ,  $c$  и  $d$  – 1, 4, 4 и 3 соответственно.

Изображенный граф является *связным*, т.е. из любой его вершины можно пройти в любую другую, пройдя по нескольким его ребрам.

Предположим, нам требуется сократить число ребер связного графа, сохранив его связность. Нетрудно видеть, что это мож-

но сделать тогда и только тогда, когда граф содержит *цикл*.

Цикл – это маршрут, составленный из различных ребер, обходящий несколько вершин без повторов и возвращающийся в исходную вершину. Число ребер в цикле называется *длиной* цикла. Например, в нашем графе есть два цикла длины три с вершинами  $b$ ,  $c$  и  $d$ , один цикл длины два с вершинами  $b$  и  $d$ , а также петля при вершине  $c$  образует цикл длины один.

Действительно, если из любого цикла связного графа выбросить любое ребро, то граф останется связным. Более того, если после удаления некоторого ребра граф остался связным, то это ребро принадлежало некоторому циклу – этот цикл образован самим ребром и кратчайшим путем между его концами в оставшемся графе.

Удаление ребра из цикла можно повторять, пока мы не приходим к графу без цикла. Полученный граф называется *остовным деревом* исходного графа.

Вообще говоря, связный граф без циклов называется *деревом*. В таких графах нет петель и из любой их вершины в любую другую есть единственный путь по ребрам без повторов вершин.

На рисунке 2 вы видите все пять различных остовных деревьев нашего исходного графа.

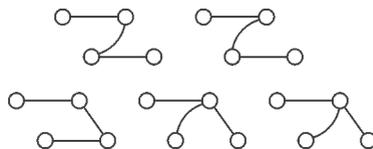


Рис. 2

Число остовных деревьев в данном графе  $\Gamma$  мы будем обозначать  $\tau(\Gamma)$ . Например, если  $\Gamma$  – это граф, рассмотренный выше, то  $\tau(\Gamma) = 5$ .

Чтобы проверить понимание данных определений, мы советуем решить следующие

щие два стандартных упражнения про деревья.

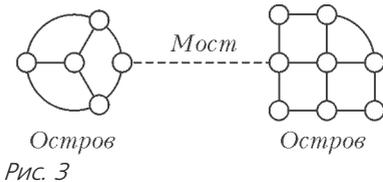
**Упражнения**

1. Докажите, что если дерево имеет хотя бы две вершины, то в нем найдется вершина степени 1.

2. Докажите, что число ребер в любом дереве на единицу меньше числа его вершин. Воспользуйтесь индукцией по числу вершин и предыдущем упражнением.

В частности, из упражнения 2 следует, что независимо от выбора ребер число удаленных ребер в процедуре получения остова дерева из графа, описанной выше, – одно и то же. (Для связного графа  $\Gamma$  это число называют его *первым числом Бэтти*; оно обычно обозначается  $\beta_1(\Gamma)$ .)

Ребро связного графа называется *мостом*, если удаление этого ребра из графа делает граф несвязным; такой граф разбивается на два связных графа, называемые его *островами* (рис.3).



Остров  
Рис. 3

**Упражнение 3.** Пусть граф  $\Gamma$  содержит мост между островами  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$ . Докажите, что

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Delta_1) \cdot \tau(\Delta_2).$$

**Удаление-плюс-стягивание**

Пусть  $\rho$  есть ребро в графе  $\Gamma$ . Обозначим через  $\Gamma \setminus \rho$  граф, полученный из  $\Gamma$  удалением ребра  $\rho$ , и через  $\Gamma/\rho$  – граф, полученный из  $\Gamma$  стягиванием ребра  $\rho$  в точку (рис.4).

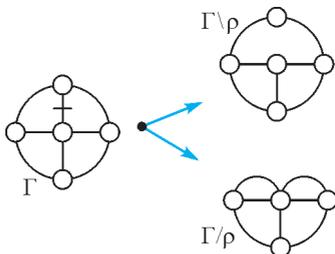


Рис. 4

Если ребро  $\rho$  не является петлей, тогда выполняется следующее соотношение:

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho) + \tau(\Gamma/\rho), \quad (*)$$

которое мы будем называть *удаление-плюс-стягивание*.

Действительно, остовные деревья в  $\Gamma$  можно разделить на две категории – те, что содержат ребро  $\rho$ , и те, что его не содержат. Для деревьев из первой категории стягивание ребра  $\rho$  в точку дает остовное дерево в  $\Gamma/\rho$ , а деревья второй категории являются также остовными деревьями в графе  $\Gamma \setminus \rho$ . Более того, оба этих соответствия взаимно однозначны. Отсюда вытекает формула (\*).

Например, если  $\Gamma$  – это первый пример и  $\rho$  есть ребро между вершинами  $b$  и  $c$ , тогда первые два остовных дерева на рисунке 2 соответствуют дереву в  $\Gamma \setminus \rho$ , а последние два соответствуют дереву в  $\Gamma/\rho$ .

Формулу (\*) удобно записывать схематически, как показано на рисунке 4. На графе  $\Gamma$  ребро  $\rho$ , для которого применяется формула, перечеркнуто.

Заметим, что никакое остовное дерево не содержит петлю. Поэтому можно удалить все петли из графа, и число его остовных деревьев останется неизменным. Иначе говоря, для любой петли  $\rho$  выполняется равенство

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus \rho).$$

Из формулы *удаление-плюс-стягивание* можно вывести несколько других полезных соотношений. Например, если в графе  $\Gamma$  есть концевая вершина  $w$  (т.е. вершина степени 1), то  $w$  и единственное ребро при  $w$  можно удалить и в полученном графе  $\Gamma \setminus w$  число его остовных графов не изменится, т.е.

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma \setminus w).$$

Действительно, обозначим через  $\rho$  единственное ребро при  $w$ . Заметим, что граф  $\Gamma \setminus \rho$  несвязен, поскольку вершина  $w$  не имеет ребер, и, значит,  $\tau(\Gamma \setminus \rho) = 0$ . С другой стороны,  $\Gamma/\rho = \Gamma \setminus w$ , откуда и получаем наше равенство.

На схемах двусторонняя стрелка « $\leftrightarrow$ » будет означать, что соответствующие графы имеют то же число остовных деревьев;

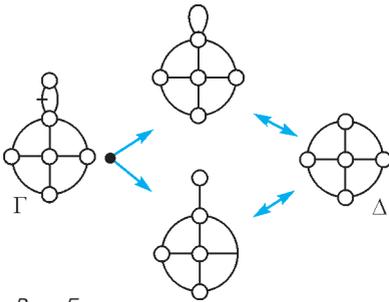


Рис. 5

например, из выведенных соотношений можно получить следующую диаграмму (рис.5), означающую, в частности, что  $\tau(\Gamma) = 2 \cdot \tau(\Delta)$ .

Равенства, описанные выше, дают алгоритм вычисления  $\tau(\Gamma)$ . Действительно, для любого ребра  $\rho$  оба графа  $\Gamma \setminus \rho$  и  $\Gamma/\rho$  имеют меньшее число ребер. Таким образом, удаление-плюс-стягивание сводит нахождение числа остовных деревьев  $\Gamma$  к нахождению числа остовных деревьев более простых графов.

**Деревья в веерах**

Графы следующего вида (рис.6) называются *веерами*; веер с  $n + 1$  вершиной будет обозначаться  $\Theta_n$ .

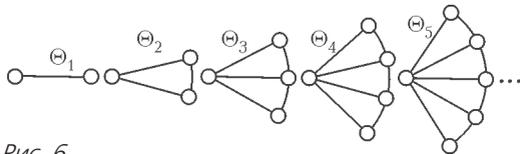


Рис. 6

Применив соотношения, полученные в предыдущем разделе, мы можем составить бесконечную схему, показанную на рисунке 7. В дополнение к веерам  $\Theta_n$  в схеме участвуют их вариации  $\Theta'_n$ , отличающие-

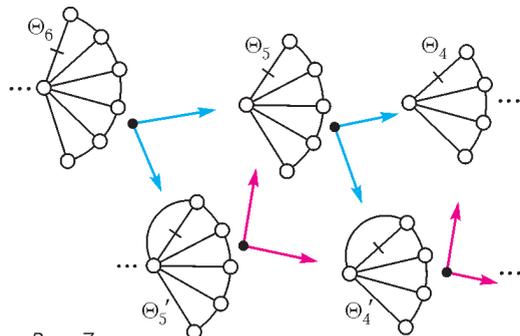


Рис. 7

ся от  $\Theta_n$  дополнительным ребром. При возникновении петель или концевых вершин мы их тут же удаляем.

Введем обозначения  $a_n = \tau(\Theta_n)$  и  $a'_n = \tau(\Theta'_n)$ . Из схемы легко вывести два рекуррентных соотношения:

$$a_{n+1} = a'_n + a_n,$$

$$a'_n = a_n + a'_{n-1}.$$

Таким образом, в последовательности чисел  $a_1, a'_1, a_2, a'_2, a_3, \dots$  каждое следующее является суммой двух предыдущих.

Напомним, что последовательность чисел Фибоначчи  $F_n$  задается тем же соотношением  $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  с  $F_1 = F_2 = 1$ . Она начинается так:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$$

Далее заметим, что  $\Theta_1$  – это две вершины, соединенные единственным ребром, а  $\Theta'_1$  – это две вершины, соединенные двойным ребром. Отсюда  $a_1 = 1 = F_2$  и  $a'_1 = 2 = F_3$ , а значит,

$$a_n = F_{2n}$$

для любого  $n$ .

Можно также вывести рекуррентное соотношение на  $a_n$  без использования  $a'_n$ :

$$a_{n+1} = a'_n + a_n = 2a_n + a'_{n-1} = 3a_n - a_{n-1}.$$

Последовательности, для которых выполняется подобное соотношение, называются *линейными рекуррентными последовательностями*. Для такой последовательности можно найти формулу для ее общего члена. В нашем случае

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right).$$

Этот процесс подробно описан в книжке [4], которую мы рекомендуем читателю.

Поскольку  $0 < \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n < 1$  для всех  $n$ , эту формулу можно записать короче:

$$a_n = \left[ \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

где  $[x]$  обозначает целую часть числа  $x$ .

Для закрепления материала советуем разобрать следующие упражнения.

**Упражнения**

4. Рассмотрим последовательность графов  $\Delta_n$  следующего типа (рис.8):

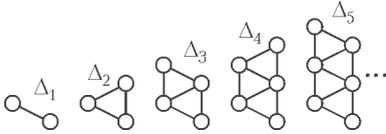


Рис. 8

Докажите, что  $\tau(\Delta_n) = \tau(\Theta_n)$ , а значит,  $\tau(\Delta_n) = F_{2n}$  для любого  $n$ .

5. Пусть  $b_n$  обозначает число остовных деревьев в лестнице  $\Lambda_n$  с  $n$  ступеньками в последовательности графов следующего типа (рис.9):

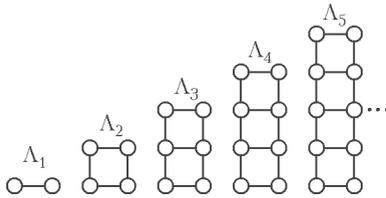


Рис. 9

Воспользуйтесь разработанным методом и докажите, что последовательность  $b_n$  удовлетворяет соотношению

$$b_{n+1} = 4b_n - b_{n-1}.$$

(Заметим, что  $b_1 = 1$  и  $b_2 = 4$ ; отсюда можно быстро посчитать первые члены последовательности:

1, 4, 15, 56, 209, 780, 2911, ...)

Вам потребуются еще пара последовательностей графов  $\Lambda'_n$  и  $\Lambda''_n$ , показанных на рисунке 10.

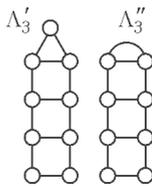


Рис. 10

**Продвинутое упражнение 6.** Колесами называются графы  $\Phi_n$  следующего типа (рис.11):

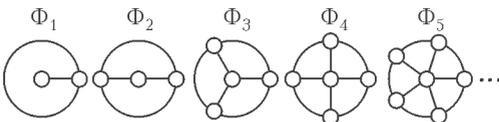


Рис. 11

Докажите, что последовательность  $c_n = \tau(\Phi_n)$  удовлетворяет такой рекуррентной формуле:

$$c_{n+1} = 4c_n - 4c_{n-1} + c_{n-2}.$$

*Замечание.* Проще вывести соотношение

$$c_{n+1} - a_{n+1} = c_n + a_n.$$

Зная, что  $c_1 = 1$ ,  $c_2 = 5$ , последнее равенство позволяет получить выражение для  $c_n$ :

$$c_n = F_{2n+1} + F_{2n-1} - 2 = L_{2n} - 2;$$

здесь  $L_n = F_{n-1} + F_{n+1}$ ; эта последовательность называется *числами Люка*. Как и числа Фибоначчи, числа Люка часто появляются в различных комбинаторных задачах.

**Заключительные замечания**

Подсчет числа остовных деревьев связан с расчетом электрических цепей. Предположим, граф  $\Gamma$  описывает электрическую цепь, в которой каждое ребро – это сопротивление в один ом, источник питания подключен к вершинам  $a$  и  $b$  и  $I$  есть общий ток в цепи, измеренный в амперах. Нам надо посчитать ток через одно из сопротивлений.

Пусть  $\rho$  есть ребро  $\Gamma$  с выбранным направлением. Заметим, что все остовные деревья  $\Gamma$  можно разделить на три типа: (1) те, в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  появляется с положительной ориентацией; (2) те, в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  появляется с отрицательной ориентацией; (3) те, в которых на пути из  $a$  в  $b$  ребро  $\rho$  не появляется. Обозначим через  $\tau_+$ ,  $\tau_-$  и  $\tau_0$  число деревьев в этих трех категориях. Очевидно, что  $\tau(\Gamma) = \tau_+ + \tau_- + \tau_0$ .

Силу тока  $I_\rho$  вдоль  $\rho$  можно вычислить по следующей формуле:

$$I_\rho = \frac{\tau_+ - \tau_-}{\tau(\Gamma)} \cdot I.$$

Доказательство получается прямой проверкой правил Кирхгофа для значений токов, полученных по этой формуле, для всех ребер в  $\Gamma$ .

Есть множество других примеров использования правил Кирхгофа в теории графов. Например, в [7] они используются в физическом доказательстве формулы Эйлера

$$B - P + \Gamma = 2,$$

где  $V$ ,  $P$  и  $G$  обозначают число вершин, ребер и граней многогранника соответственно.

Формула *удаление-плюс-стягивание* применялась при решении так называемой задачи о квадрировании квадрата. История этой задачи и ее замечательное решение обсуждаются в книжках [6] и [2]; идея этого решения также основана на оригинальном использовании электрических цепей.

Приведенный нами вывод рекуррентных формул для чисел остовных деревьев в веерах, лестницах и колесах дается в [8]; эта задача также обсуждается в классической книжке [3].

Существенно более сложной задачей является нахождение числа остовных деревьев в *полных* графах, т.е. таких, в которых любая пара различных вершин соединена единственным ребром. Если  $n$  обозначает число вершин полного графа, то число его остовных деревьев равно  $n^{n-2}$ . Иными словами,

$$\tau(\Pi_n) = n^{n-2}, \quad (**)$$

где  $\Pi_n$  обозначает полный граф с  $n$  вершинами (рис.12).

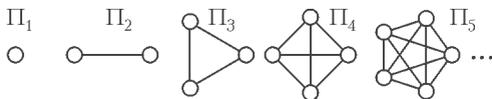


Рис. 12

Равенство  $(**)$  называется *формулой Кэли*. Наиболее известным доказательством является так называемый *код Прюфера* – способ однозначного кодирования дерева упорядоченной последовательностью из его вершин; нескольким другим доказательствам посвящена глава 30 в [1]. В расширенной версии настоящей статьи [5] приводится доказательство, основанное на формуле *удаление-плюс-стягивание*.

Для числа раскрасок вершин графа выполняется аналогичная формула: *удаление-минус-стягивание*. А именно, пусть  $\chi(\Gamma, k)$  обозначает число раскрасок графа  $\Gamma$  в  $k$  цветов, при которых концы каждого ребра покрашены в разные цвета. Тогда

выполняется соотношение

$$\chi(\Gamma, k) = \chi(\Gamma \setminus \rho, k) - \chi(\Gamma/\rho, k).$$

Действительно, допустимые раскраски графа  $\Gamma \setminus \rho$  можно разбить на две категории: (1) те, в которых концы ребра  $\rho$  покрашены в разные цвета, такие остаются допустимыми в графе  $\Gamma$ ; (2) те, в которых концы ребра  $\rho$  покрашены в один цвет, каждой такой раскраске соответствует единственная раскраска  $\Gamma/\rho$ . Отсюда – формула.

**Упражнение 7.** Докажите что для любого графа  $\Gamma$  функция  $\chi(\Gamma, k)$  является многочленом с целыми коэффициентами от  $k$ ; он называется *хроматическим многочленом* графа  $\Gamma$ .

*Подсказка.* Воспользуйтесь индукцией по общему числу ребер и вершин графа и формулой *удаление-минус-стягивание*.

**Литература**

1. М.Айгнер, Г.Циглер. Доказательства из Книги. – М.: Бином. Лаборатория знаний, 2015.
2. М.Гарднер. Математические головоломки и развлечения. – М.: Оникс, 1994.
3. Д.Кнут, Р.Грэхем, О.Паташник. Конкретная математика. Математические основы информатики. – М.: Вильямс, 2009.
4. А.И.Маркушевич. Возвратные последовательности. – М.: Гостехиздат, 1950. (Популярные лекции по математике, выпуск 1.)
5. А.М.Петрушин. Сколько деревьев в графе. – arXiv:1803.03749 [math.NO].
6. И.М.Язлом. Как разрезать квадрат? – М.: Наука, 1968.
7. М.Леви. An Electrician’s (or a Plumber’s) Proof of Euler’s Polyhedral Formula. – SIAM News, vol. 50, no.4, 2017.
8. М.Н.Ширдарех Хагхиги, Кх.Бибак. Recursive relations for the number of spanning trees. – Applied Mathematical Sciences, vol. 3, no.46, pp. 2263–2269, 2009.

# Человек- легенда XX века

(к 100-летию со дня рождения  
Ричарда Фейнмана)

*Л. БЕЛОПУХОВ*

**В** МАЕ 2018 ГОДА НЕЗАМЕТНО ДЛЯ НАУЧНОГО сообщества, не говоря уже о широкой общественности, прошло столетие со дня рождения Ричарда Филлипа Фейнмана.

Практически все, кто соприкасаются с физикой, знают о знаменитых «Фейнмановских лекциях по физике». В нашей стране в 1965–67 годах эти девять небольших по объему книжек были подписным изданием, а когда появлялись в свободной продаже, то мгновенно исчезали с прилавков научных отделов книжных магазинов.

Фактически «Лекции» – это отредактированный Фейнманом конспект лекций по общей физике, прочитанных им в начале 60-х годов студентам младших курсов Калифорнийского технологического института – знаменитого Калтеха. Присутствовавшие на всех лекциях физики Роберт Лейтон и Мэтью Сандс тщательно конспектировали лекции своего коллеги, и Фейнман счел их полноправными соавторами своего курса. В 1963–64 годах «Лекции» в виде трехтомного учебного курса были опубликованы в США и Англии, а затем переведены и опубликованы еще в 16 странах. Чуть позже, в 1965 году, увидело свет естественное дополнение к «Лекциям» – сборник задач и упражнений, которые использовались на студенческих семинарах в Калтехе.

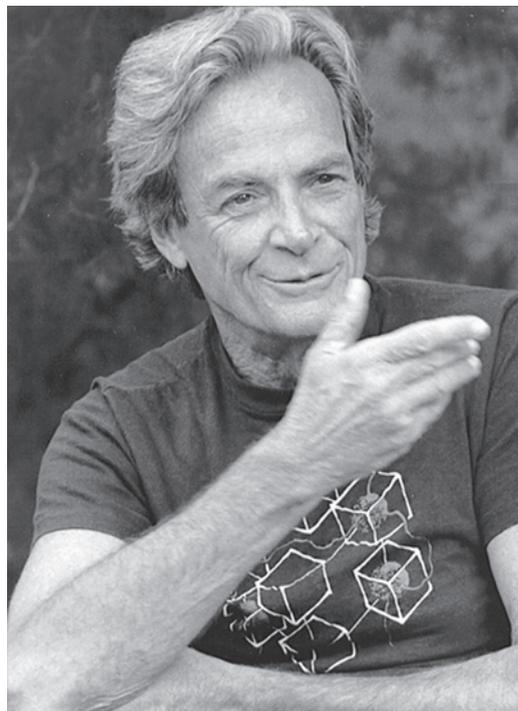
Общий тираж «Лекций» только на английском языке превысил полтора милли-

она экземпляров. На русском языке состоялось несколько изданий (последнее – в 2004 году) общим тиражом около миллиона экземпляров. Уникальность этого курса физики в том, что многое в нем, особенно в первых частях, доступно и интересно школьнику-старшекласснику, интересующемуся физикой, и в то же время он полезен студентам, будущим физикам, и преподавателям физики.

В 1964 году вдогонку к своим «Лекциям» Фейнман написал небольшую книжку «Характер физических законов». О популярности этой книги свидетельствует тот факт, что общий тираж ее многократных переизданий во всем мире составил несколько миллионов экземпляров.

В 1965 году Ричард Фейнман стал нобелевским лауреатом, вместе с С.Томонагой и Дж.Швингером, «за фундаментальные работы по квантовой электродинамике, имевшие глубокие последствия для физики элементарных частиц».

Вот только краткий перечень вклада Фейнмана в современную теоретическую физику. Свою квантовую электродинамику он построил независимо от Швингера



и Томонаги еще в 1948 году. В 1949 году разработал способ объяснения возможных превращений частиц – так называемые диаграммы Фейнмана. Эти диаграммы оказались очень удобными и наглядными во всех случаях взаимодействия частиц посредством электрического поля. Фейнман использовал понятие электрического поля как континуума виртуальных фотонов и разработал квантовоэлектродинамический метод расчета вероятностного рождения и поглощения фотонов. На первый взгляд эти понятия кажутся простыми и очевидными, но за этой простотой скрывается глубокое понимание сущности электромагнитных взаимодействий. Вместе с М.Гелл-Манном в 1958 году он разработал количественную теорию слабых взаимодействий, а в 60-е годы предложил идею внутреннего строения нуклонов, приведшую Гелл-Манна к созданию кварковой модели адронов. Большой вклад Фейнман внес в развитие квантовой механики представлений о сверхтекучести и сверхпроводимости. В квантовой механике создал метод интегрирования по траекториям, с каждым годом находящий все большее применение в различных вопросах.

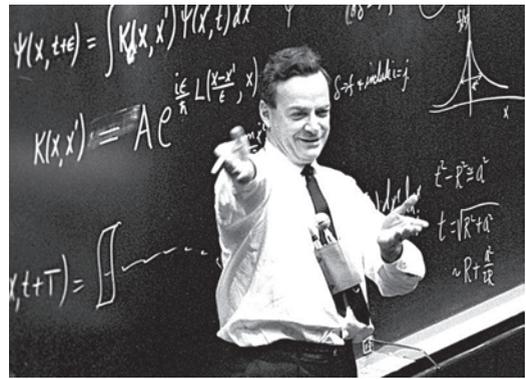
Одного этого перечня уже достаточно для причисления Фейнмана к самым выдающимся физикам XX века. Но человеком-легендой он стал и остался в памяти современников не только поэтому. Вот краткие извлечения из биографии Фейнмана.

Его родители были иммигрантами-евреями, на рубеже 20-го века переселившимися в США, отец – из Минска, мать – из небольшого польского городка. Они жили в Куинсе, самом большом пригородном округе Нью-Йорка. Благодаря трудолюбию и способностям, семья стала достаточно состоятельной. Отец Фейнмана не имел систематического образования, но смог передать сыну (и дочери) интерес к явлениям природы и стремление к их объяснению. От матери Ричард унаследовал неиссякаемое чувство юмора по отношению ко всем жизненным коллизиям. Тайной мечтой родителей было, чтобы Ричард стал

ученым и достиг успехов в науке. И их мечта сбылась. Мало того, не только сын, но и их дочь Джоан тоже посвятила жизнь науке и стала выдающимся астрофизиком.

В раннем возрасте Ричард заинтересовался физикой, а в 13 лет получил известность (и даже заработок) как мастер по ремонту радиоприемников, в устройстве которых тогда можно было разобраться «на взгляд», поскольку все их детали (радиолампы, катушки и конденсаторы) были крупногабаритными. Как впоследствии шутил Фейнман, главной трудностью для него было открыть крышку радиоприемника. Он поражал заказчиков тем, что, открыв аппарат, не просто залезал внутрь с отверткой, а начинал думать (и иной раз ходить при этом по комнате).

В 15 лет Ричард самостоятельно освоил тригонометрию и основы математического анализа. Несмотря на это, ему отказали в приеме в Колумбийский университет в Нью-Йорке из-за национальности (в 30-е годы во многих университетах США существовали квоты на прием лиц некоторых национальностей, в том числе евреев).



Фейнман стал изучать физику в Массачусетском технологическом университете. Научные статьи второкурсника появились во многих физических журналах. Магистратуру и докторантуру он закончил уже в престижном Принстонском университете и там же стал преподавать физику. На его семинарах кроме студентов иной раз присутствовали самые знаменитые принстонские физики, в том числе великий Альберт Эйнштейн, – так отличались педагогичес-

кие методы Фейнмана от всех традиционных методов.

Но преподавательская деятельность Фейнмана через год прервалась. В 1943 году он был приглашен в Лос-Аламосскую лабораторию в Калифорнии, где развернулись работы по конструированию атомной бомбы. Молодой доктор философии (физики) возглавил отдел по применению математических методов в решении многочисленных физических и инженерных вопросов, возникающих в связи с совершенно новой проблемой.

Естественно, что работа в этой лаборатории была связана с высочайшей степенью секретности. Но привилегированное положение Фейнмана, как одного из руководителей проекта, позволило поместить его молодую жену в расположенную неподалеку (в Альбукерке) больницу, где ему было разрешено по воскресеньям навещать ее. Дело в том, что перед отъездом из Принстона Ричард Фейнман оформил свой брак с Арлин Гринбаум, уже неизлечимо больной туберкулезом щитовидной железы. Он полюбил ее, когда им было по 13 лет, в 19 лет состоялась помолвка, но оформлению брака долго препятствовали родители Ричарда. Арлин умерла в 1946 году на руках у своего супруга.

Некоторое время Ричард чувствовал себя опустошенным. К личному горю добавлялось постепенное осознание вины за активное участие в создании страшного оружия. Да и трудно ему было мириться с обстановкой глобальной секретности в атомном центре. Его протесты против этой секретности были на грани фола. Так, например, он просил жену присылать ему письма невинного содержания в конвертах, где эти письма были изрезаны на множество фрагментов, вынуждая цензуру складывать такие «паззлы» для того, чтобы прочитать текст на предмет обнаружения нарушений секретности.

Навыки конструирования и создания сложных приборов позволили Ричарду разобраться в устройствах и кодировке всех типов замков для сейфов, в которых хранились секретные документы. Это часто позволяло сэкономить время для необ-

ходимого ознакомления с этими документами без длительной процедуры согласования и оформления допуска к ним. Иной раз он оставлял в сейфе записку: «Догадаетесь, кто?» В Советском Союзе тех лет такие выходки вряд ли остались бы без сурового наказания.

В 1952 году Фейнман добился разрешения выйти из атомного проекта. Целью своей жизни он определил, наряду с занятиями теоретической физикой, преподавательскую деятельность. С 1952 года он стал профессором Калифорнийского технологического института и проработал в этой должности 36 лет. Последнюю свою лекцию для магистров он прочитал за две недели до кончины.

О достоинствах его преподавательской деятельности говорят его «Фейнмановские лекции по физике» и «Характер физических законов». Во всех своих лекциях, как по общей физике, так и в спецкурсах по самым сложным проблемам современной физики, он избегает излишнего математического формализма и развивает свой собственный интуитивный подход без оглядки на авторитеты. Физический мир он представляет как мир удивительных загадок и попыток их разгадать. Студенты боготворили своего профессора. На траурной церемонии прощания в феврале 1988 года они несли плакат «Мы любим тебя, Дик».

Но человеком-легендой он стал не только поэтому. Фейнман обладал необычайно разносторонними интересами. Заинтересовавшись таинственными древними рукописями индейцев-мая, он вошел в историческую науку как ученый, разгадавший математические и астрономические достижения древних жителей американского континента.

В конце своего жизненного пути, когда он уже был серьезно болен, Фейнман необычайно заинтересовался историей и культурой тувинского народа. Он не смог добиться разрешения приехать в Туву (тогда уже входившую в состав СССР) и изучал ее культуру по описаниям, документам и опубликованным результатам археологических исследований. Это по-

зволило Фейнману сделать вывод, что Тува не только географический центр Азии, а в древности она являлась и центром всей азиатской культуры. Вместе с помощниками ему удалось создать замечательный документальный фильм об этой культуре. Думается, что тувинец по происхождению министр Сергей Шойгу, генерал армии и Герой России, президент Русского географического общества, был вдохновлен этим фильмом на организацию и руководство современными крупномасштабными археологическими исследованиями в этой российской республике.

Немалую роль в жизни Фейнмана играла музыка. Он еще в юности увлекся игрой на джазовых барабанах «бонго» и стал замечательным исполнителем в этом виде музыкального искусства. В закрытом атомном центре он был не просто «душой общества», а доставлял удовольствие всем любителям эстрадного искусства игрой на барабанах и банджо.

Будучи приглашенным в бразильский университет, он не только полностью преобразовал преподавание физики в этом университете и бразильских школах, но и



регулярно принимал участие в знаменитых карнавалах в Рио-де-Жанейро, где другие музыканты и представить себе не могли, что их коллега не профессиональный музыкант, а знаменитый физик.

Заинтересовавшись вопросом о значении искусства в духовной сфере человеческих интересов, Фейнман изучал историю живописи и архитектуры и в 44-летнем возрасте профессионально начал учиться живописи. Он стал неплохим портретистом. Состоялось несколько его персональных выставок.

Все это стало поводом для признания Фейнмана «человеком эпохи Возрождения».

А на седьмом десятке лет он стал известен всей Америке. Двадцать восьмое января 1981 года стало траурным днем для американской космонавтики и всей страны – через короткое время после старта взорвался космический корабль-челнок «Челленджер» с семью астронавтами на борту. Причины трагедии были совершенно непонятны – серьезно обсуждалось даже вмешательство инопланетян. В конце концов была создана президентская комиссия, принять участие в которой предложили и Фейнману. Несмотря на онкологическое заболевание, он согласился участвовать в этой комиссии и, кто знает, может быть продлил этим свою жизнь, поскольку его участие было очень активным и стало в конце концов решающим для разгадки причины катастрофы. Он не думал о своей болезни и мужественно преодолевал все трудности межоперационных периодов. Его коллеги по работе в комиссии зачастую и не знали о переносимых им операциях. Характерно, что решающую роль в согласии Фейнмана работать в комиссии стало даже не личное обращение Президента США, а любящая жена, которая по-видимому понимала, что это поможет супругу продлить свою жизнь.

В комиссии Фейнман стал «белой вороной». В то время как все ее участники разбились на группы и каждая группа занималась изучением какой-нибудь отдельной проблемы, Фейнман оговорил себе право не входить ни в какую группу. И как

в юности он начинал починку радиоприемников с обдумывания задачи, так и сейчас он стал тщательно анализировать мысленно все этапы запуска космического аппарата. В конце концов Фейнман пришел к выводу, что единственной причиной аварии могла стать разгерметизация отсеков двигателя, содержащих компоненты ракетного топлива. Разделители этих отсеков содержали эластичные резиновые прокладки. Конечно, материалы разделителей проходили тщательную проверку на прочность и на упругие свойства. Но эта проверка производилась при обычных, земных температурах. И все конструкторы забыли, что сильно минусовая температура может значительно изменить свойства резины – сделать ее не упругой, а жесткой и даже хрупкой.

Такая слишком обидная для американской космонавтики причина аварии была с негодованием отвергнута почти всеми членами комиссии. И Фейнману пришлось затратить немало энергии на доказательство своей идеи. Он проявил настоящее дипломатическое искусство и в конце концов на пресс-конференции наглядно продемонстрировал, как резина при опускании в ледяную воду меняет свои упругие свойства, а при опускании в жидкий азот и вовсе становится хрупкой.

В назидание будущим конструкторам-ракетчикам Фейнман подробно изложил эту «резиновую» эпопею во втором томе своих мемуаров «Какое ТЕБЕ дело до того, что думают другие?» А первый том мемуаров имеет название «Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман!» Эти книги совершенно не похожи ни на обычные мемуары, ни на автобиографии. Фейнман их не писал – он их рассказывал своему другу Ральфу Лейтону, которому и отдал авторские права на книги. Записанные Лейтоном почти дословно, эти творения Фейнмана обладают несомненными литературными достоинствами. Таковы были и все его лекции и публичные выступления.

Необычайно интересна речь Фейнмана «Ценность науки», которую он произнес на заседании Академии наук США осенью 1955 года. Тогда только что появилась

водородная бомба и разгорелся пожар «холодной войны». И актуальным стал вопрос о ценности науки, вопрос о том, несет наука добро или зло. Впоследствии, впервые публикуя эту речь, Фейнман пишет:

«...Когда я увидел, какой ужас может породить наука, то задал себе вопрос: какова ценность науки, которой я посвятил себя, как той вещи, которую я любил? “Ценность науки” – это своего рода отчет, содержащий многие мысли, когда я пытался ответить на этот вопрос».

Три аспекта ценности науки выдвигает Фейнман.

- Первый – «...знакомо каждому: научное знание дает нам возможность заниматься различными делами и создавать различные вещи».

- Второй – «...интеллектуальное удовольствие, которое некоторые люди получают от чтения научных книг, изучения науки и размышления о ней и которые другие люди получают от работы в ней».

- Третий, которому Фейнман придает особое значение, резко отличает научное мировоззрение от религиозного: «Мы, ученые, считаем само собой разумеющимся, что быть неуверенными в чем-то абсолютно нормально... Это не новая идея, это идея века разума. Это идея, которая руководила людьми, создавшими демократию, при которой мы живем... Если мы хотим решить проблему, которую никогда не решали раньше, то мы должны оставить дверь в неизвестное приоткрытой... Наша ответственность, как ученых, понимающих великий прогресс, который порождает удивительная философия неведения, великий прогресс, который является плодом свободы мысли, – провозгласить ценность этой свободы, научить не бояться сомнения, а приветствовать его, обсуждая все его “за” и “против”. И требовать этой свободы для всех следующих поколений, что составляет наш долг перед ними».

Таково завещание легендарного физика Ричарда Фейнмана, которое он оставил нам.

# Задачи по математике и физике

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач по математике и физике из этого номера следует отправлять по электронным адресам: *math@kvant.ras.ru* и *phys@kvant.ras.ru* соответственно или по почтовому адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант».

Условия каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, вместе с Вашим решением этой задачи присылайте по тем же адресам.

Задача M2526 предлагалась на XII Южном математическом турнире.

## Задачи M2526–M2529, Ф2533–Ф2536

**M2526.** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x + \frac{1}{x} = y^2 + 1, \\ y + \frac{1}{y} = z^2 + 1, \\ z + \frac{1}{z} = x^2 + 1. \end{cases}$$

*Н. Агаханов*

**M2527.** Дана числовая последовательность  $a_1 = 1^2$ ,  $a_2 = -2^2$ ,  $a_3 = -3^2$ ,  $a_4 = 4^2$ ,  $a_5 = 5^2$ ,  $a_6 = 6^2$ ,  $a_7 = -7^2$ ,  $a_8 = -8^2$ , ... Она получается из последовательности точных квадратов  $1^2, 2^2, 3^2, \dots$  расстановкой знаков: одно число со знаком «+», затем два числа со знаком «-», затем три числа со знаком «+», четыре числа со знаком «-» и т.д. Обозначим  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Докажите, что среди чисел  $A_1, A_2, \dots$  встретится бесконечно много точных квадратов.

*В. Расторгуев*

**M2528.** На плоскости отмечено  $n \geq 3$  точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Каждая пара отмеченных точек соединена отрезком. Каждый из проведенных отрезков красится в какой-то цвет.

а) Известно, что количество цветов не меньше  $n$ .

б) Известно, что в каждый цвет покрашено не более  $n - 2$  отрезков.

Докажите (в каждом из случаев а), б)), что найдется треугольник с вершинами в отмеченных точках, все три стороны которого имеют разные цвета.

*П. Кожевников*

**M2529.** Дан описанный четырехугольник  $ABCD$ . На стороне  $BC$  выбраны точки  $M$  и  $N$  так, что  $N$  лежит между  $B$  и  $M$  (рис. 1). Отрезки  $AM$  и  $DN$  пересекаются в точке  $P$ .

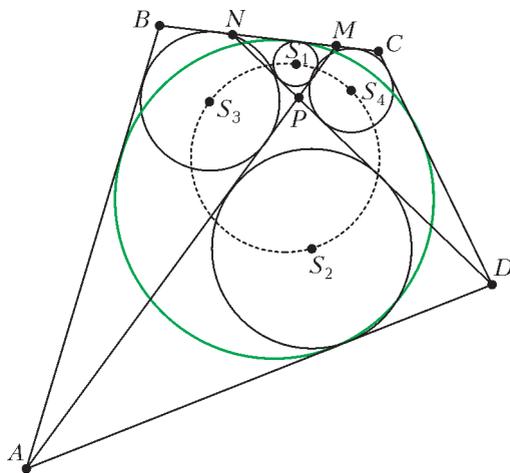


Рис. 1

В треугольники  $MNP$ ,  $APD$ ,  $ABM$  и  $DCN$  вписаны окружности с центрами  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  соответственно.

Докажите, что точки  $S_1, S_2, S_3$  и  $S_4$  лежат на одной окружности.

*А. Уткин (ученик 11 класса)*

**Ф2533.** Гантелька состоит из невесомого стержня, который соединяет две маленькие (точечные) бусинки  $A$  и  $B$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  (рис. 2). Бусинка  $A$  насажена на

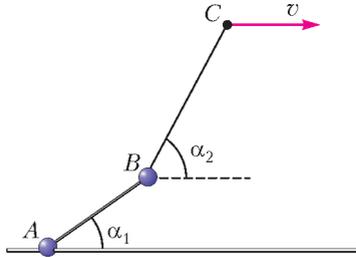


Рис. 2

длинную горизонтальную спицу. Точка  $B$  соединена с точкой  $C$  прочной невесомой нитью. Точка  $C$  перемещается в одной со спицей вертикальной плоскости параллельно спице с постоянной скоростью. Конфигурация механической системы со временем не меняется. Известны углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ , которые образуют отрезки  $AB$  и  $BC$  со спицей. Каков коэффициент трения между спицей и бусинкой  $A$ ?

*А. Буров*

**Ф2534.** Маленький массивный шарик прикреплен к одному концу упругой нити, а другой конец нити закреплен на потолке. Длина нерастянутой нити  $L = 1$  м. Шарик «запустили» так, что он движется по окружности, оставаясь все время на одном и том же расстоянии от потолка. При этом нить образует с вертикалью угол  $\alpha = 60^\circ$  и на один оборот требуется время  $t = 1,554$  с. Каков период малых вертикальных колебаний шарика на той же нити вблизи положения равновесия, если нить все время остается вертикальной? Какова максимальная амплитуда таких колебаний?

*А. Шариков*

**Ф2535.** На стеклянном баллоне лампочки накаливания написано 12 В, 96 Вт. Нить накала сделана из вольфрамовой проволоочки с поперечным сечением в форме квадрата  $a \times a$ , свернута в спираль с ша-

гом чуть больше ребра квадрата. Диаметр спирали  $D_{\text{спир}} = 1$  мм. Лампочка питается правильным эффективным напряжением 12 В от трансформатора, подключенного к сети 220 В, 50 Гц. Средняя температура нити накала  $T = 3000$  К. Найдите длину спирали и ребро квадрата, а также оцените амплитуду колебаний температуры нити накаливания. Необходимые данные о характеристиках вольфрама отыщите самостоятельно в справочниках (или воспользуйтесь другими источниками информации).

*М. Арфьлов*

**Ф2536.** Заряд  $Q$  однородно распределен по поверхности цилиндра радиусом  $R$  и высотой  $H$ . Бусинка с тем же по знаку зарядом может свободно скользить по тонкой непроводящей спице, совпадающей с диаметром срединного (равноотстоящего от оснований) сечения. Найдите период малых колебаний бусинки относительно положения равновесия. Удельный заряд бусинки  $\gamma = \frac{q}{m}$  известен.

*В. Плис*

### Решения задач M2500, M2514–M2517, Ф2521–Ф2524

**M2500\*.** Клетки таблицы  $n \times n$  нумеруются (в произвольном порядке) числами  $1, 2, \dots, n^2$ . Найдите наименьшее натуральное число  $k$  со следующим свойством: для любой нумерации найдутся две соседние по стороне клетки, номера которых отличаются не более чем на  $k$ .

**Ответ:**  $\frac{n^2 - n}{2}$ .

Для  $n = 2$  задача очевидна (перебирая варианты, получаем, что наименьшее нужное  $k$  равно 1). Далее считаем, что  $n > 2$ .

Докажем, что  $d = \frac{n^2 - n}{2}$  и есть искомое значение  $k$ . Ниже мы называем клетки *соседними*, если они имеют общую сторону. Будем использовать вспомогательную раскраску клеток нашей таблицы в черный и белый цвет в шахматном порядке, так что левая верхняя клетка черная. Столбцы таблицы нумеруем слева направо, а строки

– сверху вниз, клетки обозначаем  $(i, j)$ , где  $i$  – номер строки, а  $j$  – номер столбца.

*Пример.* Вначале предъявим нумерацию клеток таблицы, для которой номера любой пары соседних клеток отличаются хотя бы на  $d$ . Этот пример покажет, что  $k < d$  не удовлетворяет условию задачи.

Занумеруем черные клетки по порядку, начиная с 1, слева направо и сверху вниз, а далее продолжим нумерацию белых клеток, тоже слева направо и сверху вниз (на рисунке 1 показаны примеры для  $n = 6$  и

1	19	2	20	3	21	1	26	2	27	3	28	4
22	4	23	5	24	6	29	5	30	6	31	7	32
7	25	8	26	9	27	8	33	9	34	10	35	11
28	10	29	11	30	12	36	12	37	13	38	14	39
13	31	14	32	15	33	15	40	16	41	17	42	18
34	16	35	17	36	18	43	19	44	20	45	21	46
						22	47	23	48	24	49	25

Рис. 1

$n = 7$ ), так что при четном  $n = 2m$  в черных клетках стоят номера  $1, 2, \dots, 2m^2$ , а при нечетном  $n = 2m + 1$  в черных клетках стоят номера  $1, 2, \dots, (m + 1)^2 + m^2$ . Ясно, что минимальная разность между номерами соседних клеток достигается в парах клеток вида  $(2i, 2j - 1)$ ,  $(2i + 1, 2j - 1)$  и  $(2i - 1, 2j)$ ,  $(2i, 2j)$ . Минимальную разность можно посчитать из пары клеток  $(1, 2)$  и  $(2, 2)$ . В случае четного  $n$  эта разность равна  $(2m^2 + 1) - (m + 1) = 2m^2 - m = d$ . В случае нечетного  $n$  эта разность равна  $((m + 1)^2 + m^2 + 1) - (m + 2) = 2m^2 + m = d$ .

*Оценка минимальной разности.* Теперь приступим к сложной части решения – доказательству того, что при любой нумерации найдется пара соседних клеток, для которой разность номеров не больше  $d$ . Предположим противное: пусть все такие разности не меньше  $d + 1$ .

Если  $n = 3$ , то  $d + 1 = 4$ . Тогда соседями клетки с числом 5 могут быть только клетки с числами 1 и 9; значит, клетка с

числом 5 должна быть угловой. Например, пусть число 5 – в клетке  $(1, 1)$ . Тогда в клетках  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$  – числа 1 и 9. Но в клетке  $(2, 2)$  не может находиться ни одно число. Противоречие. Далее считаем, что  $n \geq 4$ .

**Утверждение.** Пусть в квадратной таблице  $n \times n$  ( $n > 1$ ), клетки которой раскрашены в шахматном порядке, выбрано

множество из  $d + 1 = \frac{n^2 - n + 2}{2}$  клетки, среди которых нет двух соседних. Тогда среди выбранных клеток не менее  $\frac{n^2 + 3}{4}$  клеток имеют одинаковый цвет.

Неформально утверждение означает, что в выбранном множестве клеток одного из цветов «заметно больше», чем клеток другого цвета. Покажем вначале, как, пользуясь утверждением, завершить решение, а затем докажем само утверждение.

Для некоторого  $i \leq n^2 - d$  рассмотрим множество из  $S_i$ , состоящее из  $d + 1$  клеток с номерами  $i, i + 1, \dots, i + d$  (далее, отождествив клетки с их номерами, считаем, что  $S_i = \{i, i + 1, \dots, i + d\}$ ). По нашему предположению, никакие две клетки из множества  $S_i$  не могут быть соседними. Согласно утверждению, в каждом из множеств  $S_1, S_2, \dots, S_{n^2-d}$  не менее  $\frac{n^2 + 3}{4}$  клеток одного цвета. Пусть для определенности в множестве  $S_1$  не менее  $\frac{n^2 + 3}{4}$  белых клеток (рассуждения с черными клетками аналогичны). В множестве  $S_2$  не может быть не менее  $\frac{n^2 + 3}{4}$  черных клеток, иначе всего в объединении множеств  $S_1 \cup S_2$  было бы не менее  $\frac{n^2 + 3}{2}$  клеток. Но, с другой стороны,  $S_1 \cup S_2 = \{1, 2, \dots, d + 2\}$ .

Так как  $d + 2 < \frac{n^2 + 3}{2}$ , мы получаем противоречие. Продолжая такие рассуждения с множествами  $S_2 \cup S_3, S_3 \cup S_4$  и т.д., мы последовательно получаем, что в каждом

из множеств  $S_1, S_2, \dots$  не менее  $\frac{n^2 + 3}{4}$  клеток белого цвета. Но множества  $S_1 = \left\{1, 2, \dots, \frac{n^2 - n + 2}{2}\right\}$  и  $S_{n^2-d} = \left\{\frac{n^2 + n}{2}, \dots, n^2\right\}$  не пересекаются, поэтому в них не менее  $2 \cdot \frac{n^2 + 3}{4} = \frac{n^2 + 3}{2}$  белых клеток, что больше количества белых клеток на доске. Противоречие.

**Доказательство утверждения.** Сначала докажем такую лемму.

**Лемма.** а) Пусть из таблицы  $n \times n$  вырезали  $n - 1$  клетку. Тогда среди связанных частей<sup>1</sup>, на которые распалась таблица, найдется часть, содержащая не менее  $\frac{(n+1)n}{2}$  клеток, а кроме того, содержащая хотя бы по одной клетке каждой строки и каждого столбца.

б) Пусть из таблицы  $n \times n$  вырезали  $n - 2$  клетки. Тогда среди связанных частей, на которые распалась таблица, найдется часть, содержащая не менее  $\frac{n^2 + 3n - 2}{2}$  клеток.

**Доказательство леммы.** а) Найдется хотя бы одна строка без вырезанных клеток. Пусть всего таких строк  $n - k$ ,  $k < n$  (и, соответственно,  $k$  строк, из которых удалили хотя бы по одной клетке). Рассмотрим одну из таких строк и вначале объявим ее *фигурой*. Далее будем «наращивать» фигуру, добавляя к ней клетки с сохранением связности фигуры. Рассмотрим *новую* строку, граничащую с фигурой. Она либо без вырезанных клеток, либо в ней вырезано  $l_1$  клеток. В первом случае добавим к фигуре всю новую строку, а во втором случае добавим  $n - l_1$  невырезанных клеток этой строки. Далее рассмотрим следующую новую строку, гра-

ничающую с фигурой. Если в этой строке нет вырезанных клеток, добавляем ее к фигуре целиком. Если в новой строке  $l_2 > 0$  вырезанных клеток, то добавим к фигуре некоторые  $n - l_1 - l_2$  невырезанных клеток, соседних с уже имеющимися клетками фигуры. Продолжим этот процесс. Все строки, кроме начальной, выступят как новые, и в конечном итоге мы получаем связную фигуру из

$$K = n(n - k) + (n - l_1) + (n - l_1 - l_2) + \dots \\ \dots + (n - l_1 - l_2 - \dots - l_k) \text{ клеток.}$$

Так как числа  $n - l_1, n - l_1 - l_2, \dots, n - l_1 - l_2 - \dots - l_k$  натуральные и попарно различные, то

$$K \geq n(n - k) + (1 + 2 + \dots + k) \geq \\ \geq ((k + 1) + (k + 2) + \dots + n) + (1 + 2 + \dots + k) = \\ = \frac{(n + 1)n}{2}.$$

Из описания процедуры вытекает, что построенная фигура имеет в каждой строке хотя бы по одной клетке и все клетки фигуры принадлежат одной связной части. Проводя аналогичные рассуждения со столбцами, также определим связную часть. Но это та же самая часть, что и в рассуждениях со строками, иначе в таблице было бы не менее  $2 \cdot \frac{(n + 1)n}{2} = (n + 1)n$  клеток.

Противоречие.

б) Повторяем рассуждения с пошаговым построением фигуры из пункта а) со следующим изменением. В конечном итоге мы получаем связную фигуру из

$$K = n(n - k) + (n - l_1) + (n - l_1 - l_2) + \dots \\ \dots + (n - l_1 - l_2 - \dots - l_k) \text{ клеток.}$$

Так как числа  $n - l_1, n - l_1 - l_2, \dots, n - l_1 - l_2 - \dots - l_k$  натуральные, попарно различные и больше 1, то

$$K \geq n(n - k) + (2 + 3 + \dots + (k + 1)) \geq \\ \geq ((k + 2) + (k + 3) + \dots + n) + \\ + n + (2 + 3 + \dots + (k + 1)) = \\ = \frac{(n + 1)n}{2} + n - 1 = \frac{n^2 + 3n - 2}{2}.$$

<sup>1</sup> Множество клеток называется *связным*, если от любой его клетки можно дойти до любой другой, переходя в соседние клетки.

Построенная фигура связная. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству утверждения. Пусть  $n$  четно,  $n = 2m$ . Докажем даже более сильное утверждение: среди выбранных  $d + 1 = 2m^2 - m + 1$  клеток хотя бы  $m^2 + m$  — одного цвета. (Действительно, это более сильная оценка, так как  $m^2 + m > m^2 + \frac{3}{4} = \frac{n^2 + 3}{4}$ .)

Рассмотрим нашу таблицу  $2m \times 2m$  как «таблицу»  $m \times m$ , каждая «клетка» которой — блок  $2 \times 2$ . Заметим, что из каждого блока  $2 \times 2$  выбрано не более двух клеток (так как выбранные клетки не могут быть соседними). Далее в «таблице»  $m \times m$  удалим те блоки  $2 \times 2$ , в которых количество выбранных клеток не превышает 1, пусть  $x$  — количество таких удаленных блоков. Число выбранных клеток тогда не превосходит  $x + 2(m^2 - x) = 2m^2 - x$ . Имеем  $2m^2 - m + 1 \leq 2m^2 - x$ , значит,  $x \leq m - 1$ . Согласно лемме (пункт а), после удаления  $x$  блоков одна из связных частей «таблицы»  $m \times m$  будет содержать хотя бы  $\frac{m(m+1)}{2}$  блоков. Остается заметить, что тогда в этих блоках выбрано не менее  $m(m+1)$  клеток, причем из связности множества блоков следует, что все эти выбранные клетки имеют один и тот же цвет. Отметим, что из второго утверждения пункта а) леммы следует, что в любой строке и любом столбце «таблицы»  $m \times m$  имеется хотя бы один блок из рассматриваемой связной части, а значит, в таблице  $2m \times 2m$  в любой строке и в любом столбце есть хотя бы одна выбранная нами клетка нужного цвета.

Пусть теперь  $n$  нечетно,  $n = 2m + 1$ ,  $m \geq 2$ . В нашей таблице  $n \times n$  рассмотрим левый верхний квадрат  $A$  размера  $2m \times 2m$  и оставшуюся «каемку»  $B$  (рис.2).

*Случай 1.* Пусть в «каемке» выбрано не более  $2m - 1$  клеток. Тогда в квадрате  $A$  выбрано не менее

$$\begin{aligned} d + 1 - (2m - 1) &= (2m^2 + m + 1) - 2m = \\ &= 2m^2 - m + 2 \text{ клеток.} \end{aligned}$$

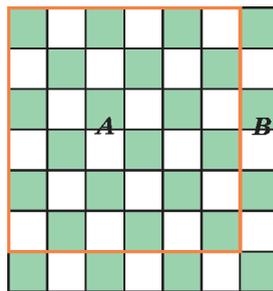


Рис. 2

Рассмотрим квадрат  $A$  как «таблицу»  $m \times m$ , каждая «клетка» которой — блок  $2 \times 2$ . Снова заметим, что из каждого блока  $2 \times 2$  выбрано не более двух клеток, и удалим те блоки  $2 \times 2$ , в которых количество выбранных клеток не превышает 1, пусть  $x$  — количество таких удаленных блоков. Число выбранных клеток тогда не превосходит  $x + 2(m^2 - x) = 2m^2 - x$ . Имеем  $2m^2 - m + 2 \leq 2m^2 - x$ , значит,  $x \leq m - 2$ . Согласно лемме (пункт б), после удаления  $x$  блоков, одна из связных частей «таблицы»  $m \times m$  будет содержать хотя бы  $\frac{m^2 + 3m - 2}{2}$  блоков. Остается заметить, что тогда в этих блоках выбрано не менее  $m^2 + 3m - 2$  клеток, причем из связности множества блоков следует, что все эти выбранные клетки имеют один и тот же цвет. Утверждение доказано, поскольку  $m^2 + 3m - 2 \geq m^2 + m + 1$ .

*Случай 2.* Пусть в «каемке» выбрано ровно  $2m$  клеток. Тогда в квадрате  $A$  выбрано  $2m^2 - m + 1$  клеток. По доказанному для четного случая, тогда среди них хотя бы  $m^2 + m$  одного цвета  $s$ . Если мы найдем в каемке еще хотя бы одну выбранную клетку цвета  $s$ , то всего в таблице  $n \times n$  будет не менее  $m^2 + m + 1 = \frac{n^2 + 3}{4}$  выбранных клеток одного цвета. Предположим противное — все  $2m$  выбранных клеток «каемки»  $B$  имеют цвет  $t$ , противоположный цвету  $s$ . Если  $t$  белый, то выбраны все  $2m$  белых клеток «каемки»  $B$ . Но мы знаем, что выбрана хотя бы одна черная клетка нижней строки таблицы  $A$ , тогда получаем пару выбранных соседних клеток — проти-

воречие. Если цвет  $t$  – черный, то в «каемке»  $B$  выбраны все черные клетки, кроме одной. Поскольку выбрана хотя бы одна белая клетка в нижней строке и в правом столбце таблицы  $A$ , то обязательно получаем пару выбранных соседних клеток – противоречие.

*Случай 3.* Пусть в «каемке»  $B$  выбрано не менее  $2m + 1$  клеток. Это возможно (не допуская пар соседних выбранных клеток) в единственном случае: выбраны все черные клетки «каемки»  $B$ . Тогда достроим снизу и справа нашу таблицу до таблицы  $(2m + 2) \times (2m + 2)$ , добавив еще одну каемку  $C$  (рис.3). Из новой каемки  $C$

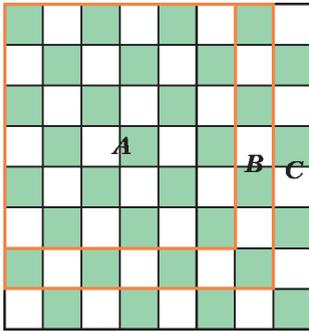


Рис. 3

выберем дополнительно все ее  $2m + 1$  черных клеток. Итого в таблице  $(2m + 2) \times (2m + 2)$  выбрано не менее  $d + 1 + 2m + 1 = \frac{(2m + 2)(2m + 1)}{2} + 1$  клеток.

Тогда, по доказанному четному случаю, в достроенной таблице выбрано не менее  $(m + 1)^2 + (m + 1) = m^2 + 3m + 2$  клеток одного цвета. Значит, до достроения таблицы было выбрано не менее

$$m^2 + 3m + 2 - (2m + 1) = m^2 + m + 1 = \frac{n^2 + 3}{4}$$

клеток одного цвета. Утверждение доказано.

Как показано выше, с помощью этого утверждения можно доказать (от противного), что при любой нумерации найдется пара соседних клеток, разность номеров которых не превосходит  $d = \frac{n^2 - n}{2}$ , что и требовалось в задаче.

Н.Седрамян

**M2514.** Даны натуральные числа  $a$  и  $b$ . Докажите, что существует бесконечно много натуральных  $n$  таких, что число  $a^n + 1$  не делится на  $n^b + 1$ .

Назовем натуральное  $n$  плохим, если  $a^n + 1$  не делится на  $n^b + 1$ . Наша цель – доказать, что плохих чисел бесконечно много. Докажем, что при любом четном  $n$  одно из чисел  $n$  и  $n^3$  плохое; из этого, очевидно, следует требуемое. Предположим противное. Тогда  $a^n + 1 : n^b + 1$  и  $a^{n^3} + 1 : n^{3b} + 1$ . Поскольку  $n^{3b} + 1 : n^b + 1$ , имеем  $a^{n^3} + 1 : n^b + 1$ . Таким образом,  $a^n \equiv -1 \pmod{n^b + 1}$  и  $a^{n^3} \equiv -1 \pmod{n^b + 1}$ .

Но отсюда следует, что  $-1 \equiv a^{n^3} = (a^n)^{n^2} \equiv (-1)^{n^2} \equiv 1 \pmod{n^b + 1}$ ; это невозможно (ибо  $n^b + 1 > 2$ ). Получено противоречие, завершающее решение задачи.

Укажем еще два возможных подхода к решению.

1) Можно доказать следующую лемму. Пусть  $a > 1$ ,  $m$  и  $n$  – натуральные числа такие, что  $a^n + 1$  делится на  $a^m + 1$ . Тогда  $n$  делится на  $m$ .

Из этой леммы можно вывести, что существует бесконечно много плохих чисел вида  $a^k$ . Действительно, если  $a^{a^k} + 1$  делится на  $a^{kb} + 1$ , то, согласно лемме,  $a^k$  должно делиться на  $kb$ . Это невозможно, если, например,  $k$  – простое число, большее  $a$ .

2) Можно воспользоваться следующим соображением. Пусть нашлось такое нечетное простое  $p$ , что  $n^b + 1$  делится на  $p$ ,  $a$  не делится на  $p$  и  $n$  делится на  $p - 1$ . Тогда  $n$  заведомо будет плохим числом, так как, согласно малой теореме Ферма,  $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ , тем самым,  $a^n + 1$  не будет делиться на  $p$ .

Реализовать план можно, выбрав в качестве  $p$  простой делитель числа  $(2a)^b + 1$ , а далее подбирать плохие  $n$ , исходя из условий  $n \equiv 2a \pmod{p}$ ,  $n \equiv 0 \pmod{p - 1}$ .

И.Богданов, А.Голованов,  
П.Кожевников

**M2515.** В карточной игре каждой карте сопоставлено числовое значение от 1 до 100, причем каждая карта бьет меньшую, за одним исключением: 1 бьет 100. Игрок знает, что перед ним лежат рубашками вверх 100 карт с различными значениями. Крупье, знающий порядок этих карт, может про любую пару карт сообщить игроку, какая из них какую бьет. Докажите, что крупье может сделать сто таких сообщений, чтобы после этого игрок смог точно узнать значение каждой карты.

Обозначим через  $c_i$  карту значения  $i$ . Выберем произвольное число  $3 < k < 98$ . Пусть крупье сообщит, какая карта бьет другую в парах  $(c_k, c_1)$ ,  $(c_{100}, c_k)$ ,  $(c_1, c_{100})$ , а также во всех парах вида  $(c_{i+1}, c_i)$  при  $i = 2, 3, \dots, 98$ . Всего он сделает 100 сообщений.

Покажем, что по этим данным игрок может восстановить значения всех карт. Он может рассуждать так. Из того что карты  $c_{100}, c_k, c_1$  бьют друг друга по циклу, следует, что одна из них имеет значение 1, а следующая по циклу – значение 100. Но кроме карт этого цикла карту  $c_k$  бьет карта  $c_{k+1}$ , а карта  $c_k$  бьет карту  $c_{k-1}$ . Значит,  $c_k$  не может иметь значение 1 или 100, т.е. значения 1 и 100 имеют карты  $c_1$  и  $c_{100}$  соответственно.

Наконец, среди оставшихся карт  $c_2, c_3, \dots, c_{99}$  в любой паре карта с большим значением бьет другую. Поскольку нам известно, что каждая карта  $c_{i+1}$  бьет  $c_i$  при  $i = 2, 3, \dots, 98$ , отсюда следует, что каждая  $c_i$  имеет значение  $i$ .

И.Богданов, К.Кноп, Ю.Кузьменко

**M2516\*.** Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдется натуральное  $a$  такое, что прибавление числа  $a$  случится бесконечное количество раз.

Заметим, что  $9^{100} < 10^{99}$ , так как  $\left(1 + \frac{1}{9}\right)^{100} \geq 1 + \frac{100}{9} > 10$  по неравенству Бернулли. Тогда индукцией по  $t$  легко

получить, что

$$9^m < 10^{m-1} \text{ при } m \geq 100. \quad (*)$$

Будем обозначать через  $p(d)$  произведение всех ненулевых цифр числа  $d$ .

Рассмотрим момент, когда на доске впервые появилось число  $B$ , не меньшее  $\underbrace{11\dots1}_{n+1}$

при некотором  $n > 200$ . Пусть это число получилось из числа  $A$ . Так как  $p(A) \leq 9^n < 10^{n-1}$ , то  $A > B - 10^{n-1} > 10^n$ . Пусть  $A$  начинается с  $k$  единиц, тогда сразу за ними идет 0, т.е.  $\underbrace{11\dots10\dots0}_k \leq A \leq$

$\leq \underbrace{11\dots109\dots9}_k$ . Произведение ненулевых цифр такого числа не превосходит  $9^{n-k}$ ; с другой стороны,  $A + p(A) \geq \underbrace{11\dots1}_{n+1}$ , откуда

$$p(A) \geq \underbrace{11\dots1}_{n+1} - \underbrace{11\dots109\dots9}_k > \underbrace{11\dots1}_{n-k}.$$

Таким образом,  $9^{n-k} \geq p(A) > \underbrace{11\dots1}_{n-k} > 10^{n-k-1}$ , из этого следует, что  $n - k \leq 99$ , и тогда  $p(A) \leq 9^{99}$ .

Итак, найдется бесконечное количество моментов, когда будет прибавляться число, не превосходящее  $9^{99}$ . Значит, какое-то из таких чисел будет прибавляться бесконечное число раз.

Д.Крачун

**M2517\*.** На сторонах  $AB$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  соответственно так, что  $PQ \parallel BC$  (рис.1). Отрезки  $BQ$  и  $CP$  пересекаются в точке  $O$ .

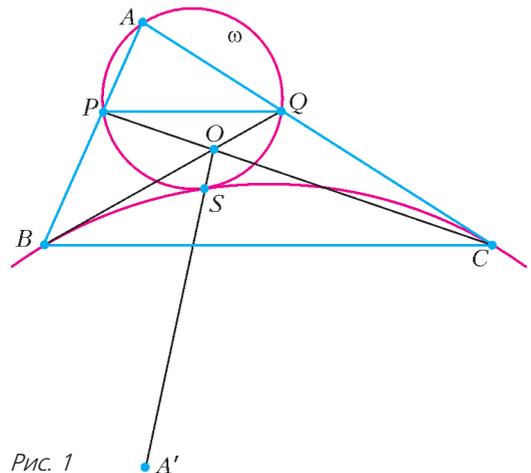


Рис. 1

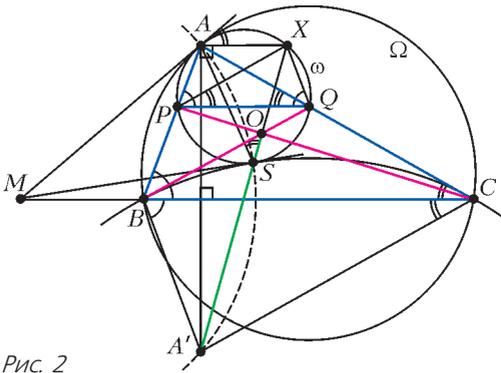


Рис. 2

Точка  $A'$  симметрична точке  $A$  относительно прямой  $BC$ . Отрезок  $A'O$  пересекает окружность  $\omega$ , описанную около треугольника  $APQ$ , в точке  $S$ . Докажите, что окружность, описанная около треугольника  $BSC$ , касается окружности  $\omega$ .

Случай  $AB = AC$  следует из симметрии; без ограничения общности будем считать, что  $AC > AB$  (рис.2).

Выберем на  $\omega$  точку  $X$  так, что  $PAXQ$  – равнобокая трапеция. Тогда  $\angle XQP = \angle APQ = \angle ABC = \angle CBA'$  и, аналогично,  $\angle XPQ = \angle BCA'$ . Значит,  $XQ \parallel BA'$  и  $XP \parallel CA'$ . Поэтому гомотетия с центром  $O$ , переводящая отрезок  $PQ$  в  $CB$ , переводит треугольник  $XPQ$  в  $A'CB$ ; следовательно, точка  $O$  (а потому и точка  $S$ ) лежит на  $A'X$ .

Пусть  $M$  – центр окружности, описанной около треугольника  $ASA'$ . Тогда  $\angle MAA' = 90^\circ - \angle ASX$ . Поскольку  $XA \parallel BC \perp AA'$ , получаем  $\angle MAX = \angle MAA' + 90^\circ = 180^\circ - \angle ASX$ , т.е.  $MA$  касается  $\omega$  в точке  $A$ . Так как  $MA = MS$ , то  $MS$  также касается  $\omega$ .

Пусть  $\Omega$  – окружность, описанная около треугольника  $ABC$ ; тогда  $\omega$  и  $\Omega$  гомотетичны с центром в  $A$ , поскольку  $PQ \parallel BC$ . Значит,  $MA$  также является касательной к  $\Omega$ . Кроме того,  $M$  лежит на серединном перпендикуляре  $BC$  к отрезку  $AA'$ ; поэтому  $MA^2 = MB \cdot MC$ . Итак,  $MS^2 = MA^2 = MB \cdot MC$ , т.е.  $MS$  касается описанной окружности треугольника  $BSC$  и  $\omega$  в точке  $S$ . Отсюда и следует требуемое.

Другой вариант решения можно получить,

используя точку  $T$  пересечения прямых  $A'O$  и  $BC$ . Можно показать, что  $T$  лежит на общем серединном перпендикуляре к отрезкам  $AX$  и  $PQ$ , а также на описанных окружностях треугольников  $BPS$  и  $CQS$ .

*И. Богданов, А. Кузнецов*

**Ф2521.** В результате столкновения астероидов образовались два осколка, разлетающиеся с одинаковыми скоростями, направленными под углом  $\varphi$  друг к другу. Найдите отношение полуосей орбиты первого осколка, если орбита второго оказалась круговой. Орбиты осколков лежат в одной плоскости.

В начальный момент оба осколка находятся на одинаковом расстоянии от Солнца и имеют одинаковые скорости, поэтому у них одинаковы удельные энергии. Удельная энергия тела  $\epsilon$  однозначно определяет величину большой полуоси орбиты. Это следует из формулы

$$\epsilon = \frac{v^2}{2} - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{2a},$$

вытекающей из второго закона Кеплера и закона сохранения энергии. Следовательно, величина большой полуоси  $a$  орбиты первого тела равна радиусу  $R$  круговой орбиты второго тела и, кроме того, расстояния от тел до Солнца в начальный момент также равны  $R$ .

Как известно, эллипс представляет собой множество точек, для которых сумма расстояний до фокусов одинакова. Приравнивая эти суммы для точек  $A$  и  $B$  (рис.1):

$$L_A = AF_1 + AF_2 = F_2C + AF_2 = 2a,$$

$$L_B = 2F_1B,$$

находим, что  $F_1B = a$ , т.е. в начальный

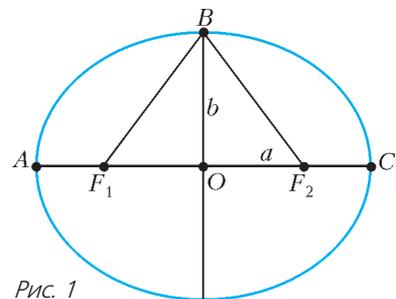


Рис. 1

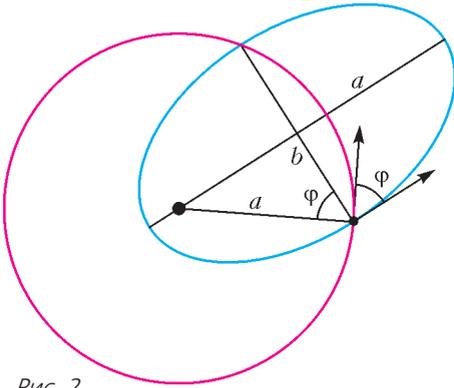


Рис. 2

момент первое тело находится как раз в точке  $B$  своей орбиты и угол  $\varphi$  между скоростями равен углу  $F_1BO$ .

Теперь легко получить ответ (рис.2):

$$\frac{b}{a} = \cos \varphi.$$

Заметим, что по третьему закону Кеплера равенство больших полуосей означает равенство периодов. Это означает, что через один оборот осколки столкнутся в той же точке, где образовались.

Д.Александров

**Ф2522.** На горизонтальной дороге перед красным светофором скопилась колонна одинаковых по массе легковых автомобилей (см. рисунок). Дорога скользкая, ко-



эффициент трения колес о дорогу  $\mu = 0,264$ . Расстояния между стоящими друг за другом автомобилями  $l = 0,3$  м. Все машины в стоящей колонне одинаково удерживаются на месте системами ручного тормоза, действующими только на задние колеса (блокируется их вращение). У очередной подъезжавшей к неподвижной колонне легковой автомашины «отказала» основная система тормозов, но водитель успел дернуть рычаг ручного тормоза за секунду до столкновения, т.е. его автомобиль тормозил не очень эффективной системой ручного тормоза. Аварии избежать не удалось, и автомобиль с неисправными тормозами «со-

брал» перед собой четыре автомобиля. Удары автомобилей были абсолютно неупругие, т.е. после столкновения автомобили «сцеплялись» друг с другом. Какой была скорость автомобиля виновника аварии на расстоянии  $l$  от первого пострадавшего автомобиля, если пятому на очереди автомобилю «повезло» – к нему «сборка» только прикоснулась? Нагрузка на колеса всех автомобилей распределялась равномерно.

Пусть после очередного столкновения  $n$  сцепленных автомобилей имеют импульс  $p_n$ , а импульс этих автомобилей после торможения и за мгновение до столкновения с  $(n + 1)$ -м автомобилем равен  $p_n^*$ . Для процесса торможения можно записать

$$\frac{\mu}{2} nmgl = \frac{p_n^2 - p_n^{*2}}{2nm},$$

откуда

$$p_n^2 = p_n^2 - \mu (nm)^2 gl.$$

Здесь учтено, что тормозят только задние колеса и что нагрузка на колеса распределена равномерно. Используя полученное рекуррентное соотношение, для момента остановки можно записать

$$0 = p_1^2 - \mu m^2 gl \sum_1^N n^2,$$

где  $N$  – число автомобилей в «сборке», включая автомобиль виновника аварии. Сумму квадратов вычисляем по известной формуле

$$\sum_1^N n^2 = \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}.$$

В итоге получаем

$$m^2 v_0^2 = \mu m^2 gl \frac{N(N+1)(2N+1)}{6},$$

или

$$v_0 = \sqrt{gl\mu \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}}.$$

Если  $\mu = 0,264$ ,  $l = 0,3$  м,  $N = 5$ ,  $g = 10$  м/с<sup>2</sup>, то

$$v_0 = \sqrt{10 \cdot 0,3 \cdot 0,264 \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{6}} \text{ м/с} = 6,6 \text{ м/с}.$$

А.Власов

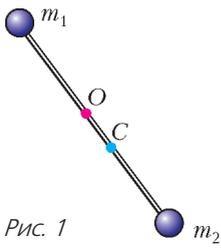


Рис. 1

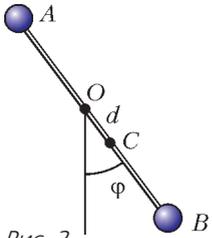


Рис. 2

**Ф2523.** Гантелька длиной  $l$  с массами  $m_1$  и  $m_2$  на концах, будучи подвешена в точке  $O$ , совершает малые колебания в окрестности устойчивого равновесия, оставаясь в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис.1). Найдите частоту и период этих колебаний, если точка подвеса удалена от центра масс — точки  $C$  — на расстояние  $d$ .

Пусть, для некоторого момента времени,  $\varphi$  — угол отклонения гантельки от проходящей через точку  $O$  вертикали (рис.2),  $\Omega$  — угловая скорость вращения гантельки. Кинетическая энергия гантельки равна

$$E_k = \frac{I_O \Omega^2}{2},$$

где  $I_O$  — момент инерции гантельки относительно оси вращения. Согласно теореме Штейнера,

$$I_O = I_C + (m_1 + m_2)d^2,$$

где  $I_C$  — момент инерции гантельки относительно оси, параллельной оси вращения и проходящей через центр масс  $C$ . При этом

$$I_C = m_1 AC^2 + m_2 CB^2 = \\ = m_1 \left( \frac{m_2 l}{m_1 + m_2} \right)^2 + m_2 \left( \frac{m_1 l}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2.$$

Потенциальная энергия гантельки равна

$$E_{\text{п}} = (m_1 + m_2)gd(1 - \cos \varphi),$$

или, в случае малых отклонений гантельки от вертикали,

$$E_{\text{п}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)gd\varphi^2.$$

Для малых колебаний закон сохранения энергии имеет вид

$$E_k + E_{\text{п}} = \frac{1}{2}(I_O \Omega^2 + (m_1 + m_2)gd\varphi^2) = \\ = \frac{I_O}{2}(\Omega^2 + \omega^2 \varphi^2) = \text{const}.$$

Отсюда для частоты  $\omega$  малых колебаний получаем

$$\omega^2 = \frac{(m_1 + m_2)gd}{I_O} = \\ = \frac{(m_1 + m_2)gd}{\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} l^2 + (m_1 + m_2)d^2}.$$

Период колебаний, как обычно, находится из соотношения

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Полезно исследовать зависимость частоты и периода колебаний от положения точки подвеса. Для этого введем безразмерные параметры

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}, \quad x = \frac{d}{l} > 0,$$

с помощью которых выражение для квадрата частоты колебаний представимо в виде

$$\omega^2 = \frac{g}{l} \frac{x}{x^2 + \mu}.$$

Это выражение, как функция от  $x$ , достигает максимума при  $x_* = \sqrt{\mu}$ , при этом

$$\omega_{\text{max}}^2 = \frac{g}{l} \frac{x_*}{x_*^2 + \mu} = \frac{1}{2\sqrt{\mu}} \frac{g}{l}.$$

Этой частоте соответствует минимальный период колебаний

$$T_{\text{min}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{max}}}.$$

Так, например, если массы на концах гантельки равны, то  $\mu = \frac{1}{4}$  и  $T_{\text{min}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ , причем гантелька оказывается подвешенной за один из своих концов.

*Замечание.* Оказывается, неважно, с какой стороны от центра масс располагается точка подвеса. Более того, если подвесить (например, с помощью невесомых и нерастяжимых нитей) гантельку в любой точке окружности радиусом  $d$  с центром в точке  $C$  (рис.3), то период колебаний такой системы вновь будет тем же са-

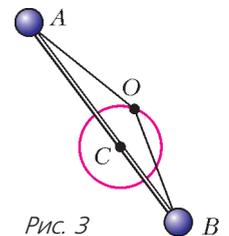
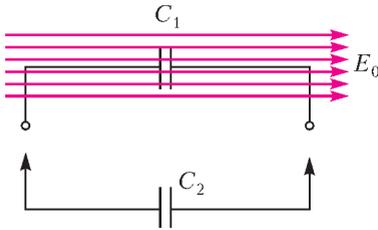


Рис. 3

мым. Подобное свойство имеет место и для произвольных физических маятников.

*А.Буров*

**Ф2524.** Незаряженный плоский конденсатор емкостью  $C_1$  расположен во внешнем однородном электрическом поле  $E_0$ , перпендикулярном плоскостям его обкладок (см. рисунок). Расстояние между обкладками  $d$ . Конденсатор емкостью



$C_2$ , несущий на своих пластинах заряды  $\pm q_0$  (плюс на обкладке слева), подключается к первому конденсатору. Определите заряды  $q_1$  и  $q_2$  на левых пластинах конденсаторов после подключения. Влиянием внешнего электрического поля в месте нахождения второго конденсатора пренебречь.

Поместим сначала на пластины второго конденсатора такие заряды  $\pm q'_2$ , чтобы после его подсоединения к первому конденсатору ничего не изменилось. Очевид-

но,  $q'_2 = C_2 E_0 d$  (заряд на левой обкладке). Таким образом, в этом случае система зарядов не создает поля ни в одном из проводников.

Возьмем теперь два параллельно соединенных незаряженных конденсатора емкостями  $C_1$  и  $C_2$  и сообщим им заряд  $\Delta q = q_0 - q'_2$ . Он разделится пропорционально емкостям:

$$\Delta q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \Delta q, \quad \Delta q'_2 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \Delta q$$

и тоже не создаст поля ни в одном из проводников.

Накладывая эти распределения друг на друга, получаем ответ:

$$q_1 = \Delta q'_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (q_0 - C_2 E_0 d) = C \left( \frac{q_0}{C_2} - E_0 d \right),$$

$$q_2 = q'_2 + \Delta q'_2 = C_2 E_0 d + \frac{C_2}{C_1 + C_2} (q_0 - C_2 E_0 d) = C \left( \frac{q_0}{C_1} + E_0 d \right),$$

где  $q_0$ ,  $q_1$  и  $q_2$  – алгебраические величины зарядов на левых обкладках конденсаторов, а  $C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$ .

*С.Крюков*

## ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

# Движение тел в гравитационном поле

**Б. МУКУШЕВ**

ОДНИМ ИЗ ЯРКИХ ПРИМЕРОВ ДВИЖЕНИЯ в постоянном во времени однородном силовом поле является движение тела в поле тяготения вблизи Земли. Разумеется,

движение в таком поле происходит с постоянным ускорением лишь при условии, что кроме силы тяготения Земли никакие другие силы на тело не действуют. При этом считается, что линейные размеры тела малы по сравнению с радиусом Земли.

Рассмотрим движение тела, брошенного под углом  $\alpha$  к горизонту. Траектория тела лежит в вертикальной плоскости. Введем в этой плоскости систему координат следующим образом: ось  $x$  направим горизонтально, а ось  $y$  – вертикально вверх. Запишем начальные условия движения тела в соответствии с выбранной системой координат: при  $t = 0$ ,  $x_0 = 0$ ,  $y_0 = 0$ ,  $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$ ,  $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$ . Кроме того, проекции ускорения тела на оси  $x$  и  $y$  равны, соответственно,  $a_x = 0$  и  $a_y = -g$ . Теперь формулы для

проекций скорости и уравнения для координат примут вид

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos \alpha, \quad v_y = v_0 \sin \alpha - gt, \\ x &= v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{gt^2}{2}. \end{aligned}$$

Выражая  $t$  из первого уравнения и подставляя во второе, найдем уравнение траектории тела  $y = y(x)$ :

$$\begin{aligned} y &= xt \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = \\ &= xt \operatorname{tg} \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \end{aligned} \quad (1)$$

Это уравнение описывает семейство параболических траекторий, зависящих от двух параметров: начальной скорости  $v_0$  и угла  $\alpha$ .

Проведем серию *компьютерных экспериментов* с помощью пакета прикладных программ (ППП) MathCAD. Запишем уравнение (1) на языке MathCAD:

$$Y(x) := -g \cdot \frac{x^2}{2 \cdot (v_0)^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} + \tan(\alpha) \cdot x,$$

где  $\alpha$  выражается в радианах. На рисунке 1 представлены результаты компьютерного

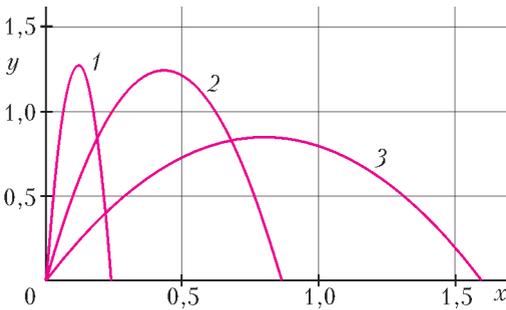


Рис. 1

эксперимента в условиях  $v_0 = 5$  м/с и  $\alpha_1 = 1,131$  рад,  $\alpha_2 = 1,398$  рад,  $\alpha_3 = 1,524$  рад.

Для более общего анализа параболического движения тел рассмотрим несколько конкретных примеров.

**Пример 1.** Пусть баллистический пистолет выстреливает шарики во всевозможных направлениях. Начальная скорость шариков равна  $v_0$ . Определите границу области, которая простреливается из пистолета. Найдите поверхность, на которой расположены вершины траекторий всех шариков. Спротивлением воздуха пренебречь.

Прежде всего разберемся с таким вопросом: как следует стрелять, чтобы попасть в цель, находящуюся на расстоянии  $s$  по горизонтали и на высоте  $H$  над горизонтальной плоскостью, проходящей через пистолет? Траектория шарика проходит через точку с координатами  $s$  и  $H$ , поэтому уравнение (1) принимает вид

$$H = st \operatorname{tg} \alpha - \frac{gs^2}{2v_0^2} (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha). \quad (2)$$

Решая это уравнение как квадратное относительно  $\operatorname{tg} \alpha$ , получим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{gs} \left( v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H)} \right). \quad (3)$$

Исследование выражения (3) позволяет сделать следующие выводы.

1) Если дискриминант положителен, т.е.  $v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H) > 0$ , то уравнение (3) имеет два различных вещественных корня. Это означает, что в этом случае в цель можно попасть по двум различным траекториям. Траектория с меньшим значением угла  $\alpha$  называется *настильной*, с большим — *навесной*.

2) При  $v_0^4 - g(gs^2 + 2v_0^2 H) < 0$  уравнение (3) не имеет вещественных корней и в цель при данном значении  $v_0$  попасть нельзя ни при каком значении  $\alpha$ . Иными словами, ни одна из траекторий семейства (1) не «дотягивает» до цели.

3) При равном нулю дискриминанте, когда корни совпадают, в цель можно попасть только по единственной траектории. Можно сказать также, что равенство нулю дискриминанта определяет ту минимальную начальную скорость, при которой еще можно попасть в данную цель:

$$4v_{0\min}^4 - g(gs^2 + 2v_{0\min}^2 H) = 0, \quad (4)$$

откуда

$$v_{0\min}^2 = g \left( H + \sqrt{H^2 + s^2} \right).$$

Если значение  $\vartheta_{0\min}$  мы подставим в выражение (3), то получим

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s}.$$

Следовательно, чтобы попасть в цель с минимальной скоростью, ствол пистолета нужно наклонить к горизонту под углом  $\alpha_0$ .

Далее находим координаты точек, в каждую из которых можно попасть лишь единственным выстрелом. Перепишем соотношение (4) в ином виде, когда координата  $s$  является аргументом функции  $H$ :

$$H = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gs^2}{2v_0^2}.$$

Теперь легко получить уравнение границы простреливаемой области, если заменить координаты определенной наиболее удаленной цели  $s$  и  $H$  на переменные величины  $x$  и  $y$  – координаты точек искомой границы:

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v_0^2}. \quad (5)$$

Это – уравнение параболы с вершиной с координатами  $x = 0, y = v_0^2/(2g)$ , ее ветви направлены вниз и пересекают абсциссу в точках  $x = \pm v_0^2/g$ .

На рисунке 2 представлены результаты компьютерного эксперимента при условии

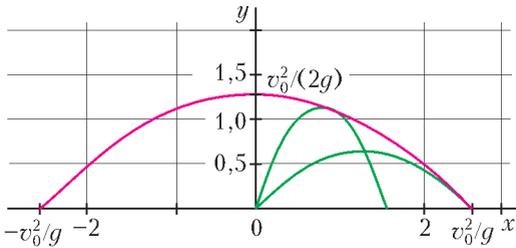


Рис. 2

$v_0 = 5$  м/с. Найдена поверхность границы простреливаемой области, которая является параболоидом вращения параболы (5) вокруг оси  $y$  (красная линия). Найдены траектории шарика, брошенного под различными углами к горизонту (зеленные линии). Если шарик брошен под углом  $\alpha = \pi/2$ , то он касается найденной параболы вершиной, а другие траектории шарика касаются ее боковой точкой. В точки, расположенные вне параболоида вращения по отношению к пистолету, при данной начальной скорости попасть нельзя.

Теперь построим поверхность, на которой расположены вершины траекторий всех шариков. Вершина траектории, соответствующей начальной скорости  $v_0$  и углу  $\alpha$ , расположена в точке с координатами

$$x = \frac{v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad y = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Исключая из этих уравнений угол  $\alpha$ , получим

$$y^2 + \frac{x^2}{4} - \frac{v_0^2}{2g} y = 0,$$

или

$$\left( \frac{y - v_0^2/(4g)}{v_0^2/(4g)} \right)^2 + \left( \frac{x}{v_0^2/(2g)} \right)^2 = 1. \quad (6)$$

Это – уравнение эллипса, центр которого соответствует точке  $(0; v_0^2/4g)$ , малая полуось равна  $v_0^2/4g$ , большая полуось равна  $v_0^2/2g$ .

На рисунке 3 представлен график поверхности, которая является эллипсоидом вращения уравнения (6) вокруг оси  $y$  (синяя

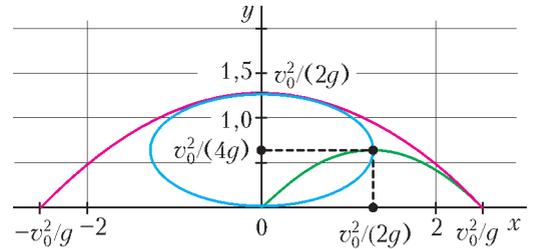


Рис. 3

линия). Эллипсоид и параболоид вращения делят пространство на три области. Зеленым цветом выделена траектория шарика, выпущенного из пистолета со скоростью 5 м/с, когда угол его ствола с горизонтом составляет  $45^\circ$ . Любую неподвижную цель, находя-

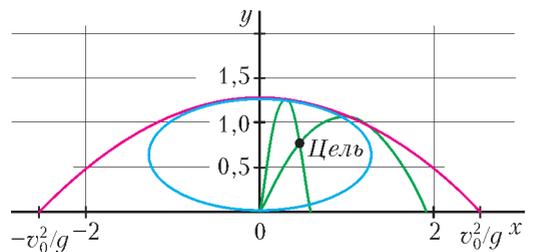


Рис. 4

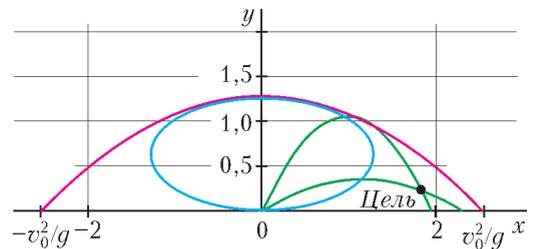


Рис. 5

щуюся внутри эллипсоида, можно поразить шариками как при восходящем, так и при нисходящем их движении (рис.4). В цели, расположенные между параболоидом и эллипсоидом, шарики попадают только при нисходящем полете (рис.5).

**Пример 2.** Необходимо поразить неподвижную цель, расположенную в точке с координатами  $\left(\frac{v_0^2}{2g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$ , где  $v_0 = 5$  м/с. В нашем случае скорость шарика регулируется пистолетом от 0 до  $v_0$ . При какой *наименьшей* скорости шарик поражает цель? Под каким углом к горизонту нужно производить выстрел в этом случае?

Как уже говорилось, в цель можно попасть с начальной скоростью  $v_0$  по двум траекториям. На первый взгляд кажется, что начальная скорость полета шарика будет *наименьшей* из всех возможных, если *наивысшая* точка траектории приходится на то место, в которое хотим попасть. Одна из траекторий как раз соответствует этому предположению. Но если мы найдем  $v_{0\min}$  и  $\alpha_0$  и проведем компьютерный эксперимент, то обнаружится ошибочность этого предположения.

Сначала проведем теоретический анализ. Известно, что  $s = v_0^2/(2g)$  и  $H = v_0^2/(4g)$ , т.е.  $s = 2H$ . Тогда

$$\begin{aligned} v_{0\min}^2 &= g\left(H + \sqrt{H^2 + s^2}\right) = gH(1 + \sqrt{5}) = \\ &= \frac{v_0^2}{4}(1 + \sqrt{5}) \approx 0,81v_0^2, \\ &\text{и } v_{0\min} = 0,9v_0 = 4,5 \text{ м/с}, \\ \operatorname{tg}\alpha_0 &= \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 0,61, \\ &\text{и } \alpha_0 \approx 58^\circ \approx 1,01 \text{ рад}. \end{aligned}$$

Для того чтобы наглядно представить траекторию движения шарика, при которой он может поражать цель, проведем соответствующий компьютерный эксперимент. Результаты этого эксперимента представлены на рисунке 6. При измерении угла  $\alpha_0$  с помощью транспортира можно убедиться, что результаты теоретического анализа и эксперимента получаются одинаковыми. Таким образом, шарик, выпущенный из пистолета с минимальной скоростью, поразит цель в точке с координатами  $\left(\frac{v_0^2}{2g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$  только при *нисходящем* полете. Соответствующая тра-

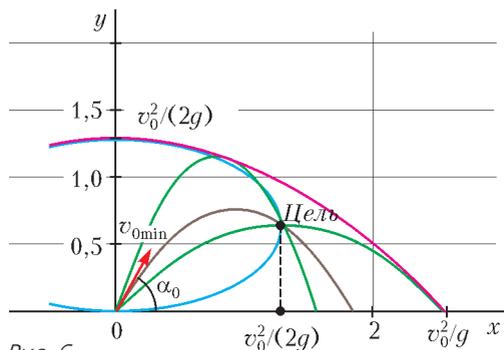


Рис. 6

ектория шарика представлена на рисунке 6 коричневым цветом. Также нетрудно найти углы начальных скоростей  $v_0$  шариков, движущихся по двум другим траекториям. Для этого используем уравнение (3) и получим  $\operatorname{tg}\alpha = 2 \pm 1$ , т.е. углы равны  $45^\circ$  и  $71^\circ$  соответственно. (Эти углы можно найти также экспериментальным способом – измерив углы начальных скоростей с горизонтом непосредственно транспортиром.)

**Пример 3.** Соблюдая все условия примера 2, нужно найти *наименьшую скорость* шарика и соответствующий угол выстрела, необходимые для поражения цели, когда она находится:

- а) внутри эллипсоида в точке  $\left(\frac{v_0^2}{8g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$ ;
- б) в пространстве между эллипсоидом и параболоидом в точке  $\left(\frac{5v_0^2}{8g}; \frac{v_0^2}{4g}\right)$ .

При теоретическом рассмотрении этого примера и в результате компьютерных экспериментов можно убедиться в том, что поражение любой цели происходит только при *нисходящем* полете. А ответы будут такими.

$$\begin{aligned} \text{В случае а) } v_{0\min}^2 &= g\left(H + \sqrt{H^2 + s^2}\right) = \\ &= \frac{v_0^2}{4}(1 + \sqrt{2}) \approx 0,60v_0^2, \text{ и } v_{0\min} \approx 0,78v_0 \approx \\ &\approx 3,88 \text{ м/с}; \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 2,41, \text{ и} \\ &\alpha_0 \approx 68^\circ \approx 1,19 \text{ рад}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{В случае б) } v_{0\min}^2 &= g\left(H + \sqrt{H^2 + s^2}\right) = \\ &= \frac{v_0^2}{4}\left(1 + \frac{\sqrt{29}}{2}\right) \approx 0,92v_0^2, \text{ и } v_{0\min} \approx 0,96v_0 \approx \\ &\approx 4,80 \text{ м/с}; \operatorname{tg}\alpha_0 = \frac{H + \sqrt{H^2 + s^2}}{s} \approx 1,48, \text{ и} \\ &\alpha_0 \approx 56^\circ \approx 0,98 \text{ рад}. \end{aligned}$$

## Задачи

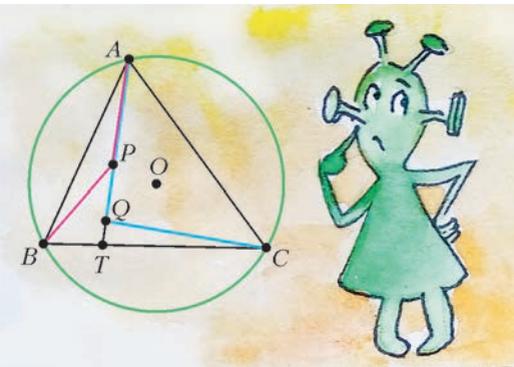
1. В биологической лаборатории живут люди, мыши и змеи. Вместе у них 40 голов, 100 ног и 36 хвостов. Сколько в лаборатории змей?

*Д.Шноль*



2. На стороне  $BC$  треугольника  $ABC$  отметили точку  $T$ . На отрезке  $AT$  отметили такие точки  $P$  и  $Q$ , что  $AQ = QC$ ,  $AP = PB$ . Точка  $O$  — центр описанной окружности треугольника  $ABC$ . Докажите, что углы  $OCQ$  и  $OBP$  равны.

*Е.Бакаев*



Иллюстрации Д.Гришуковой

Эти задачи предназначены прежде всего учащимся 6–8 классов.

Эти задачи предлагались на XXIV Турнире математических боев имени А.П.Савина.



3. Барон Мюнхгаузен заявил, что способен разрезать правильную пятиконечную звезду на две части и сложить из них многоугольник, который имеет центр симметрии (не переворачивая при этом части). Могут ли слова барона быть правдой?

*А.Грибалко*

4. Однажды Сережа заметил, что родился не в пятницу и ни разу не встречал свой день рождения в пятницу. Сколько полных лет ему могло быть? День рождения у Сережи — не



29 февраля. (Год, номер которого кратен 400, — високосный; оставшиеся годы, номера которых кратны 100, — невисокосные; все другие годы, номера которых кратны 4, — високосные.)

*Е.Бакаев*

# Лазерная локация

С.ДВОРЯНИНОВ

*Обсуждая однажды вопрос о происхождении математики на заседании Французского математического общества, я сказал, что математика — это часть физики, являющаяся, как и физика, экспериментальной наукой: разница только в том, что в физике эксперименты стоят обычно миллионы долларов, а в математике — единицы рублей.*

В.И.Арнольд. Что такое математика?

**В**О ВРЕМЯ ВТОРОЙ МИРОВОЙ ВОЙНЫ английские летчики планировали ночной рейд, который надо было осуществить на чрезвычайно малой высоте — около 20 метров. Это спасало самолеты от их обнаружения противником и от зенитного огня. Но как пилоту держать эту малую постоянную высоту?

Известно, что высоту можно определять с помощью барометрического высотомера — чем выше, тем меньше атмосферное давление. Но на малых высотах эти приборы не дают необходимую точность.

Сейчас мы знаем, например, о лазерной локации Луны. Луч лазера направляется на ее поверхность, а отраженный сигнал улавливается на Земле приемником. По

времени прохождения сигнала туда и обратно вычисляется расстояние до Луны. С 1970-х годов точность измерения этого расстояния достигла 2–3 сантиметра. При этом используются установленные на Луне уголкового отражатели.

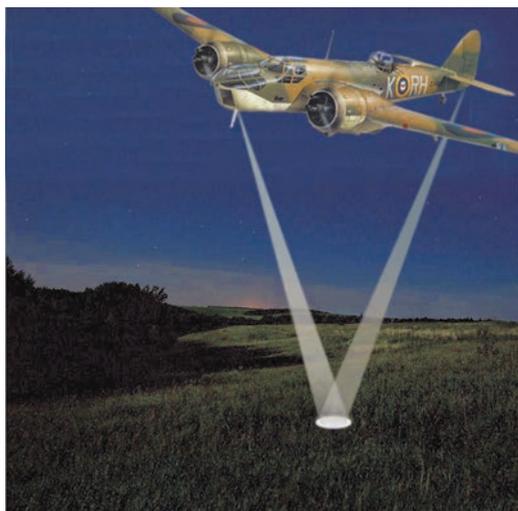
Лазерная локация — частный случай эхолокации. Посылаемая и затем отраженная волна может быть и звуковой, и ультразвуковой, и радиоволной. Соответствующие приборы — это радары, сонары, гидролокаторы, эхолоты, дефектоскопы, медицинские аппараты УЗИ.

Но не их использовали английские летчики. Все было намного проще, на уровне школьной геометрии. Фактически задача сводилась к построению треугольника по стороне и проведенной к ней высоте.

На фюзеляже самолета — у носа и у хвоста — крепились два прожектора, лучи которых могли быть направлены вниз под любым углом к самолету. Получался треугольник со стороной, равной длине самолета, и двумя прилежащими к ней углами. Ясное дело, что эти углы можно выбрать так, чтобы высота треугольника равнялась заданной высоте полета  $h$ . Это соответствует тому, что лучи прожекторов пересекаются на расстоянии  $h$  от фюзеляжа. Тогда, в реальной боевой операции англичан,  $h = 18,5$  м. И такая точность была достигнута. Требуемые углы для прожекторов рассчитывались заранее.

Во время полета самолета на произвольной высоте штурман видел внизу на земле или на воде два световых пятна. Их взаимное положение зависело от высоты полета. Глядя на них, штурман давал указания пилоту на изменение высоты. Требуемая высота достигалась, когда два световых пятна сливались в одно.

Действительно, и просто, и эффективно!



# КОНКУРС ИМЕНИ А.П.САВИНА

Мы начинаем очередной конкурс по решению математических задач. Они рассчитаны в первую очередь на учащихся 7–9 классов, но мы будем рады участию школьников всех возрастов. Конкурс проводится совместно с журналом «Квантик».

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, электронной почтой по адресу: [savin.contest@gmail.com](mailto:savin.contest@gmail.com) или обычной почтой по адресу: 119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А, «Квант» (с пометкой «Конкурс имени А.П.Савина»). Кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

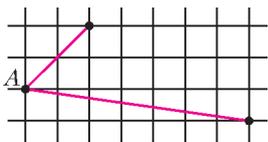
Мы приветствуем участие в конкурсе не только отдельных школьников, но и команд (в таком случае присылается одна работа со списком участников). Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квант» и призы. Задания, решения и результаты публикуются на сайте [sites.google.com/view/savin-contest](http://sites.google.com/view/savin-contest)

Желаем успеха!

1. У входа в парк развлечений висит электронное табло, показывающее время (часы и минуты). Когда табло показало 9:00, в парке открылись шесть аттракционов и работали до вечера по 1, 2, 3, 4, 5 и 6 минут соответственно с минутным перерывом. Когда Олег пришел днем в парк, ни один аттракцион не работал. Какое время показывало табло в этот момент?

Е.Братцев

2. Используя линейку и нарисованную часть координатной сетки, требуется построить биссектрису угла  $A$ . Какое наименьшее количество отрезков потребуется для этого провести? (Линейкой разрешается только проводить прямые линии.)



Е.Бакаев, В.Расторгуев

3. Квантик и Ноутик показывают такой фокус. Зритель задумывает любые шесть разных целых чисел от 1 до 125 и сообщает их только Ноуту. После этого Ноутик называет Квантику какие-то пять из них, а Квантик угадывает шестое задуманное зрителем число. Предложите способ, как могли бы действовать Квантик и Ноутик, чтобы фокус всегда удавался.

И.Акулич

4. Квадрат  $100 \times 100$  разбит на доминошки. Можно ли гарантировать, что его можно разрезать на две связные части, симметричные друг другу относительно центра квадрата, не разрезав ни одну доминошку? (Часть называется связной, если от любой ее клетки можно дойти до любой другой, совершая переходы в соседнюю по стороне клетку и не выходя за границу фигуры.)

Е.Бакаев

## «Квант» улыбается

### Таблица умножения

Известный немецкий алгебраист Эрнст Эдуард Куммер (1810–1893) очень плохо умел считать в уме. Если при чтении лекции ему надо было выполнить простенький расчет, он обычно прибегал к помощи студентов.

Однажды ему надо было умножить 7 на 9. Он начал вслух рассуждать:

– Гм... это не может быть 61, потому что 61 – простое число. Это не может быть и 65, потому что 65 делится на 5, 67 – тоже простое число, а 69 – явно слишком много. Остается только 63...

### Самый старый математик

Один из самых плодовитых математиков XX века П.Эрдеш (1913–1996) в старости часто подшучивал над своим почтенным возрастом. Так однажды на вопрос о том, сколько ему лет, он ответил:

– Два с половиной миллиарда. Потому что, когда я был совсем юным, ученые думали, что возраст Земли равен двум миллиардам лет, а теперь считается, что он уже равен четырем с половиной миллиардам лет.

Из книги «Математики тоже шутят»

# Формула Пика и тающий лед

Г. МЕРЗОН

## Формула Пика

Хорошо известен следующий способ *приближенного* вычисления площади фигуры на клетчатой бумаге: к числу клеток, полностью занятых фигурой, надо прибавить

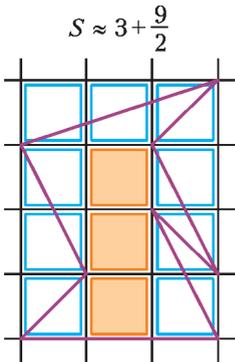


Рис. 1

половину от числа клеток, занятых частично (рис.1). Но замечательно, что небольшой модификацией этот нехитрый рецепт можно превратить в *точную* формулу для площади многоугольника.

стостью занятых фигурой, надо прибавить половину от числа клеток, занятых частично (рис.1). Но замечательно, что небольшой модификацией этот нехитрый рецепт можно превратить в *точную* формулу для площади многоугольника.

### Формула Пика.

Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки может быть найдена по формуле

$$S = i + \frac{b}{2} - 1,$$

где  $i$  – число узлов сетки (строго) внутри многоугольника,  $b$  – число узлов сетки на его границе.

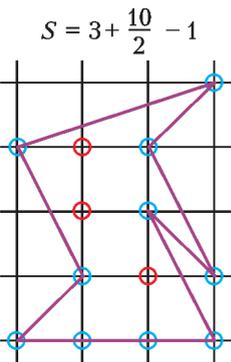


Рис. 2

Пример использования формулы Пика приведен на рисунке 2.

Из этой формулы видно, кстати, что площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки всегда является целой или полуцелой (что априори не очевидно даже для треугольников: представьте себе вычисление этой площади по формуле Герона...).

Известны разные доказательства формулы Пика (см., например, [1], [2]). В большинстве из них сначала рассматривают случай треугольника, а затем сводят к нему формулу Пика для произвольного многоугольника.

Мы обсудим мысленный эксперимент, который предложил Кристиан Блаттер ([3]; см. также изложение в [4]), непосредственно доказывающий формулу Пика для любого многоугольника. Но сначала перепишем правую часть формулы немного в другом виде.

## Вес узла

Площадь фигуры можно оценить приблизительно, просто посчитав количество узлов, которые эта фигура покрывает. Чтобы посчитать точнее, посмотрим на узлы чуть внимательнее: узлы строго внутри многоугольника учитываются с весом 1, а узлы на границе – с весом  $1/2$  («лежат внутри наполовину»). Естественно сделать следующий шаг и начать по-разному учитывать вершины многоугольника и узлы сетки на его сторонах.

Нарисуем вокруг каждого узла сетки по кругу маленького радиуса и посчитаем каждый узел с таким весом, какая часть этого круга лежит внутри нашего многоугольника (т.е. точка вне многоугольника получает вес 0, точка строго внутри – вес 1, «обычная» точка на стороне – вес  $1/2$ , вершина угла  $\alpha$  – вес  $\alpha / (2\pi)$ ).

**Теорема.** Площадь многоугольника с вершинами в узлах сетки равна количеству занятых им узлов сетки, посчитанных с указанными выше весами.

Утверждение этой теоремы равносильно формуле Пика. Действительно, вес каждой из  $i$  внутренних вершин равен 1. А вес каждой из  $b$  вершин на границе отличается от  $1/2$  на *внешний* угол в этой точке, де-

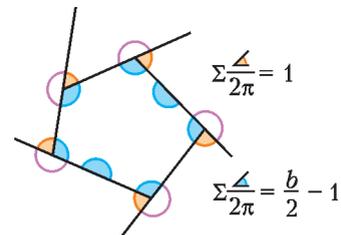


Рис. 3

ленный на  $2\pi$ . Так как сумма всех внешних углов многоугольника равна  $2\pi$ , сумма весов внешних вершин равна  $b/2 - 1$  (рис.3).

Такая формулировка формулы Пика в определенном смысле более естественна. И в такой форме теорема буквально верна и для «многоугольников с дырками» (тогда как обычная формула Пика требует некоторой модификации). С другой стороны, в этой формулировке перестала быть видна полужелательность площади...

**Тающий лед**

Перейдем к доказательству теоремы.

Представим себе, что в каждом узле сетки стоит по тонкому цилиндрическому столбику льда.

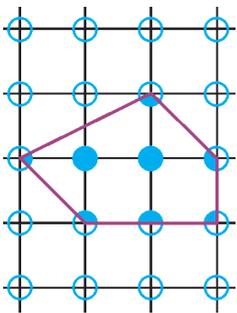


Рис. 4

Вес (точнее – масса) каждого столбика равен 1; радиус у всех столбиков одинаковый и достаточно маленький, чтобы столбик в узле, не лежащем на стороне, не пересекал эту сторону. Тогда общий вес льда внутри нашего многоугольника как раз равен сумме весов узлов (рис.4).

Растопим теперь весь лед. Вода растечется равномерно по плоскости. Утверждение теоремы состоит в том, что количество воды внутри многоугольника (площадь) в точности равно количеству льда, который находился внутри многоугольника (сумма весов).

Чтобы не думать, как именно течет и перемешивается бесконечное количество воды на бесконечной плоскости, можно построить вокруг каждого из столбиков льда по забору в виде единичного квадратика (рис.5) и считать, что каждый столбик растекается по своему квадрату одинаковым и центрально-симметричным образом.

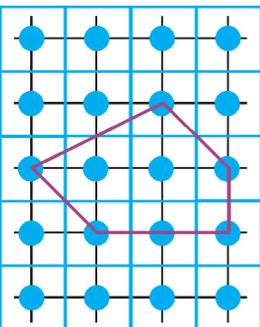


Рис. 5

Посмотрим на по-

ток воды через какую-нибудь сторону многоугольника. Исходная расстановка столбиков льда *симметрична относительно середины этой стороны*. Значит, симметричны и потоки воды при таянии льда (рис.6). В частности, через каждую сторону многоугольника вытекло столько же воды, сколько втекло!

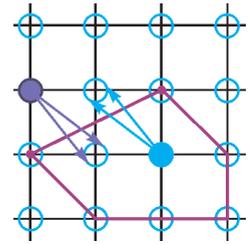


Рис. 6

Теорема доказана.

**Обобщения**

Точно такое же рассуждение показывает, что объем многогранника (с вершинами в узлах сетки) равен сумме весов занимаемых им узлов, *если каждая грань многогранника имеет центр симметрии*.

Последнее ограничение существенно: если взять какой-нибудь тетраэдр, то его объем обычно не равен сумме вкладов узлов (можно убедиться в этом, например, для правильного тетраэдра, вписанного в единичный куб).

Тем не менее, рассматривая вместо сумм весов некоторые многочлены («solid-angle polynomials»), можно получить формулы для объемов многогранников любой размерности. В частности, можно получить формулу для объема многогранника в трехмерном пространстве, если учитывать кроме узлов исходной сетки узлы вдвое более мелкой сетки.

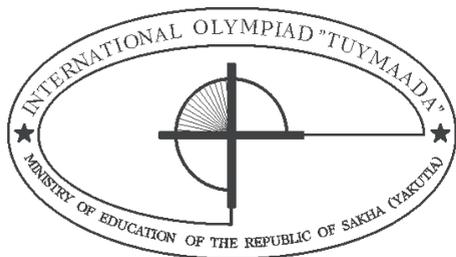
Другая возможность состоит в том, чтобы по-другому выбирать веса. На этом пути тоже можно получить замечательные формулы для объемов многогранников. Но об этом поговорим в другой раз.

**Литература**

1. Н.Васильев. Вокруг формулы Пика. – «Квант», 1974, №12.
2. А.Кушнirenко. Целые точки в многоугольниках и многогранниках. – «Квант», 1977, №4.
3. С.Blatter. Another Proof of Pick's Area Theorem. – Mathematics Magazine, 1997, 70.
4. S.Tabachnikov. Proofs (not) from The Book. – Mathematical Intelligencer, 2014, 36 (2).

# XXV Международная олимпиада «Туймаада».

## Физика



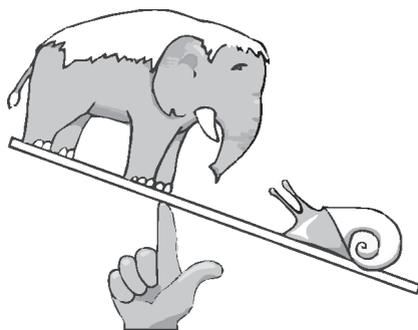
В июле этого года в Якутске прошла очередная, XXV Международная олимпиада «Туймаада» по физике, математике, информатике и химии.

Участники олимпиады по физике соревновались как обычно в двух лигах: старшей и младшей (жюри распределяет участников по лигам в зависимости от их возраста и класса). Олимпиада в каждой лиге состояла из двух туров: теоретического и экспериментального. Согласно программе олимпиады по физике, участникам могут быть предложены задачи на любые темы, содержащиеся в углубленной школьной программе (в младшей лиге – за исключением тем, относящихся к выпускному классу).

Авторы оригинальных задач (как теоретических, так и экспериментальных) могут присылать их методической комиссии (achudn@mail.ru) – лучшие задачи войдут в итоговый комплект и после олимпиады будут опубликованы в образовательных журналах.

Статья подготовлена на основании методического пособия: *А.В.Чудновский, Р.Е.Аванесян, А.Б.Акимов, С.Д.Варламов, В.В.Ефимов, А.Р.Зильберман, В.М.Муравьев, М.Г.Рындин, Г.М.Тарнопольский*. XXV Международная олимпиада «Туймаада». Физика. Теоретический тур. Методическое пособие / под ред. А.В.Чудновского – М.–Якутск, 2018.

Ниже представлены задачи теоретического тура для старшей лиги и список победителей олимпиады.



### Теоретический тур

#### СТАРШАЯ ЛИГА

##### Задача 1. Башня из кубиков

Две одинаковые легкие квадратные пластины со стороной  $a$  соединены по углам четырьмя одинаковыми легкими пружинами жесткостью  $k$  каждая, оси которых перпендикулярны плоскостям пластин. Одна пластина лежит на горизонтальном столе, а на вторую экспериментатор Глюк аккуратно ставит (по одному за раз) однородные кубики, каждый из которых имеет массу  $m$  и ребро  $a$ . Башня из какого максимального количества  $N$  кубиков будет сохранять устойчивость, если соседние витки пружин не касаются друг друга?

##### Задача 2. Вынимание шаров

В высокий сосуд с квадратным основанием со стороной  $a$  налиты несмешивающиеся жидкости плотностями  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , про которые известно соотношение  $\omega_1 > \omega_2$ . В жидкости погружены два касающихся однородных шара так, что шар плотностью  $\rho_1$  и радиусом  $R_1$  касается дна сосуда, шар плотностью  $\rho_2$  и радиусом  $R_2$  касается поверхности верхней жидкости, а общая касательная плоскость шаров совпадает с границей раздела между жидкостями. Какую мини-

мальную работу  $A$  нужно совершить, чтобы вынуть шары из жидкостей?

### Задача 3. Волшебная тепловая машина

Тепловая машина Скуперфильда работает по циклу, состоящему из двух изохор (при объемах  $V$  и  $2V$ ) и двух изобар (при давлениях  $p$  и  $2p$ ), а ее рабочим телом является кислород. Управляющий Крабс придумал «улучшение» (способ повысить КПД) с помощью волшебной палочки Незнайки, взмах которой позволяет мгновенно превращать весь кислород в озон (или наоборот) без изменения массы, объема и внутренней энергии. Считайте, что в рассматриваемом диапазоне температур вращательные степени свободы молекул газов включены, а колебательные – выморожены.

1) Найдите КПД  $\eta_1$  тепловой машины до «улучшения».

2а) Во сколько раз  $k_1$  изменяется температура при описанном превращении кислорода в озон?

2б) Во сколько раз  $k_2$  изменяется давление при описанном превращении кислорода в озон?

3) Найдите максимальный КПД  $\eta_2$  тепловой машины после «улучшения».

### Задача 4. Пчелка

Пчелка летит с постоянной скоростью  $v$  вдоль силовой линии, соединяющей равные по модулю разноименные точечные заряды, находящиеся на расстоянии  $2l$  друг от друга. Найдите ускорение  $a$  пчелки, когда она равноудалена от зарядов, если угол между направлениями на заряды из этой точки равен  $\gamma$ . При  $n\alpha \ll 1$  справедливо приближение  $(1+x)^n = 1+n\alpha$ .

### Задача 5. Закон отражения

Плоская электромагнитная волна длиной  $\lambda_0$  падает под углом  $\alpha$  на плоское изначально неподвижное зеркало.

1) На какой угол  $\varphi$  отклонится отраженная волна, когда зеркало начнет двигаться со скоростью  $v$  перпендикулярно плоскости зеркала навстречу волне?

2) Найдите длину волны  $\lambda$  после отражения от движущегося зеркала, полагая найденный в предыдущем пункте угол  $\varphi$  известным.

## ПОБЕДИТЕЛИ ОЛИМПИАДЫ

### МЛАДШАЯ ЛИГА

*Tudor Gabriel Mocioi*, Румыния – диплом I степени и кубок,  
*Islam Amangeldy Galymuly*, Казахстан – диплом I степени,  
*Magauin Rassul*, Казахстан – диплом II степени,  
*Bryan Chen Yu*, Сингапур – диплом II степени,  
*Сергей Атаманов*, Россия – диплом II степени,  
*Артём Васильев*, Россия – диплом III степени,  
*Леонид Дьячковский*, Россия – диплом III степени,  
*Сандаара Попова*, Россия – диплом III степени,  
*Николай Ужинский*, Россия – диплом III степени,  
*Рената Неустроева*, Россия – диплом III степени.

### СТАРШАЯ ЛИГА

*Ionel-Emilian Chiosa*, Румыния – диплом I степени и кубок,  
*Iosif Theodor*, Румыния – диплом I степени,  
*Vasile Mihai*, Румыния – диплом II степени,  
*Sidharth Chambocheri Veetil*, Сингапур – диплом II степени,  
*Sergey Laza*, Беларусь – диплом II степени,  
*Andrei-Călin Diaconu*, Румыния – диплом III степени,  
*Tairali Asylbekov*, Казахстан – диплом III степени,  
*Аман Гаврильев*, Россия – диплом III степени,  
*Diyyar Tulenov*, Казахстан – диплом III степени,  
*Александр Кузьминов*, Россия – диплом III степени.

Публикацию подготовили  
*А.Чудновский, Ю.Григорьев*

# Неравенства для элементов треугольника

**В. ДРОЗДОВ**

**В** О МНОГИХ ЗАДАЧНИКАХ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ встречаются различные неравенства, содержащие элементы треугольника:  $p$  – полупериметр,  $R$  и  $r$  – радиусы описанной и вписанной окружностей соответственно.

Ниже мы установим некоторые соотношения, позволяющие вывести ряд неравенств и разобраться, как такие неравенства можно конструировать.

Сначала выведем три формулы, в которых участвуют  $p$ ,  $R$ ,  $r$ , а также  $S$  – площадь треугольника,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – длины его сторон.

Поскольку  $rp = S$  и  $R = \frac{abc}{4S}$ , имеем

$$abc = 4Rrp. \quad (1)$$

Преобразуем разность квадратов  $p^2 - r^2$ :

$$\begin{aligned} p^2 - r^2 &= p^2 - \frac{S^2}{p^2} = \\ &= p^2 - \frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{p^2} = \\ &= \frac{p^3 - (p-a)(p-b)(p-c)}{p} = \\ &= p(a+b+c) - (ab+ac+bc) + \frac{abc}{p} = \\ &= \frac{(a+b+c)^2}{2} - (ab+ac+bc) + 4 \cdot \frac{bc}{4S} \cdot \frac{S}{p} = \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} + 4Rr. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2p^2 - 2r^2 - 8Rr. \quad (2)$$

Так как

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab+ac+bc),$$

то

$$ab + ac + bc = p^2 + r^2 + 4Rr. \quad (3)$$

Теперь рассмотрим классические неравенства

$$H \leq G \leq A \leq Q$$

между средними величинами от трех положительных переменных  $x$ ,  $y$ ,  $z$ :

$$\text{среднее гармоническое } H = \frac{3}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}};$$

$$\text{среднее геометрическое } G = \sqrt[3]{xyz};$$

$$\text{среднее арифметическое } A = \frac{x+y+z}{3};$$

$$\text{среднее квадратическое } Q = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}}.$$

В неравенстве  $G \leq A$  положим  $x = a$ ,  $y = b$ ,  $z = c$ . С учетом (1) получим неравенство

$$2p^2 \geq 27Rr. \quad (4)$$

В неравенстве  $H \leq A$  возьмем  $x = ab$ ,  $y = ac$ ,  $z = bc$ . Применение формул (1) и (3) сразу дает неравенство

$$p^2 + r^2 \geq 14Rr. \quad (5)$$

В неравенстве  $A \leq Q$  положим  $x = \frac{1}{ab}$ ,  $y = \frac{1}{ac}$ ,  $z = \frac{1}{bc}$ . Тогда с помощью формулы (2) устанавливается неравенство

$$p^2 \geq 3r^2 + 12Rr. \quad (6)$$

Отметим, что равенство в неравенствах (4)–(6) будет достигаться только для равностороннего треугольника, так как неравенства о средних обращаются в равенство только при условии  $x = y = z$ .

В качестве упражнения читатель может получить неравенства на  $R$ ,  $r$ ,  $p$ , например, полагая  $x = ab$ ,  $y = ac$ ,  $z = bc$  в неравенствах  $H \leq Q$ ,  $A \leq Q$ .

# ЕГЭ по физике

Варианты ЕГЭ по физике 2018 года отличались от вариантов предыдущих двух лет только одним: под номером 24 появилось задание по астрономии. Чтобы помочь абитуриентам подготовиться к выполнению этого задания, наш журнал опубликовал статью ( «Квант» №1 за 2018 г., с. 42), содержащую разбор десяти типовых заданий ЕГЭ по астрономии. Тем самым, варианты ЕГЭ по физике 2018 года содержали не 31 задание, а 32, и максимальная сумма первичных баллов составляла 52, а не 50. При этом 17 заданий (1–4, 8–10, 13–15, 19, 20, 22, 23, 25–27) оценивались максимум в 1 балл, 10 заданий (5–7, 11, 12, 16–18, 21, 24) оценивались максимум в 2 балла, 5 заданий (28–32), требующие развернутого решения, оценивались максимум в 3 балла каждое.

В 2019 году структура вариантов по физике не изменится. Ниже приводятся один из вариантов открытого сегмента полностью, а также избранные задачи из других вариантов.

## Вариант 1

### Инструкция по выполнению работы

Для выполнения экзаменационной работы по физике отводится 3 часа 55 минут (235 минут). Работа состоит из двух частей, включающих в себя 32 задания.

В заданиях 1–4, 8–10, 14, 15, 20, 25–27 ответом является целое число или конечная десятичная дробь. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответа №1. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

Ответ:  $-2,5 \text{ м/с}^2$ .

Ответом к заданиям 5–7, 11, 12, 16–18, 21, 23 и 24 является последовательность двух цифр. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу без пробелов, запятых и других дополнительных символов в бланк ответа №1.

Ответ: 

А	Б
4	1

Ответом к заданию 13 является слово. Ответ запишите в поле ответа в тексте рабо-

ты, а затем перенесите по приведенному ниже образцу в бланк ответов №1.

Ответ: вправо.

Ответом к заданиям 19 и 22 являются два числа. Ответ запишите в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите по приведенному ниже образцу, не разделяя числа пробелом, в бланк ответов №1.

Ответ: (1,4±0,2) Н.

Ответ к заданиям 28–32 включает в себя подробное описание всего хода выполнения задания. В бланке ответов №2 укажите номер задания и запишите его полное решение.

При вычислениях разрешается использовать непрограммируемый калькулятор.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими черными чернилами. Допускается использование или гелевой, или капиллярной, или перьевой ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

*Желаем успеха!*

Ниже приведены справочные данные, которые могут понадобиться Вам при выполнении работы.

### ДЕСЯТИЧНЫЕ ПРИСТАВКИ

Наименование	Обозначение	Множитель
гига	Г	$10^9$
мега	М	$10^6$
кило	к	$10^3$
гекто	г	$10^2$
деци	д	$10^{-1}$
санти	с	$10^{-2}$
милли	м	$10^{-3}$

Наименование	Обозначение	Множитель
микро	мк	$10^{-6}$
нано	н	$10^{-9}$
пико	п	$10^{-12}$

## КОНСТАНТЫ

число  $\pi$ 

$$\pi = 3,14$$

ускорение свободного падения на Земле

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

гравитационная постоянная

$$G = 6,7 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$$

универсальная газовая постоянная

$$R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$$

постоянная Больцмана

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$$

постоянная Авогадро

$$N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

скорость света в вакууме

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$$

коэффициент пропорциональности в законе Кулона

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2$$

модуль заряда электрона (элементарный электрический заряд)

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$$

постоянная Планка

$$h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$$

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ РАЗЛИЧНЫМИ  
ЕДИНИЦАМИ

температура 0 К = -273 °С

атомная единица

массы 1 а.е.м. =  $1,66 \cdot 10^{-27}$  кг

1 атомная единица

массы эквивалентна 931,5 МэВ

1 электронвольт 1 эВ =  $1,6 \cdot 10^{-19}$  Дж

1 астрономическая

единица 1 а.е.  $\approx 150000000$  км1 световой год 1 св. год  $\approx 9,46 \cdot 10^{15}$  м1 парсек 1 пк  $\approx 3,26$  св. года

## МАССА ЧАСТИЦ

электрона  $9,1 \cdot 10^{-31}$  кг  $\approx 5,5 \cdot 10^{-4}$  а.е.м.протона  $1,673 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1,007$  а.е.м.нейтрона  $1,675 \cdot 10^{-27}$  кг  $\approx 1,008$  а.е.м.

## АСТРОНОМИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ

средний радиус Земли  $R_{\oplus} = 6370$  км  
 радиус Солнца  $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8$  м  
 температура поверхности Солнца  $T = 6000$  К

## ПЛОТНОСТЬ

воды 1000 кг/м<sup>3</sup>  
 древесины (сосна) 400 кг/м<sup>3</sup>  
 керосина 800 кг/м<sup>3</sup>  
 подсолнечного масла 900 кг/м<sup>3</sup>  
 алюминия 2700 кг/м<sup>3</sup>  
 железа 7800 кг/м<sup>3</sup>  
 ртути 13600 кг/м<sup>3</sup>

## УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

воды  $4,2 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К)  
 льда  $2,1 \cdot 10^3$  Дж/(кг · К)  
 железа 460 Дж/(кг · К)  
 свинца 130 Дж/(кг · К)  
 алюминия 900 Дж/(кг · К)  
 меди 380 Дж/(кг · К)  
 чугуна 500 Дж/(кг · К)

## УДЕЛЬНАЯ ТЕПЛОТА

парообразования воды  $2,3 \cdot 10^6$  Дж/кг  
 плавления свинца  $2,5 \cdot 10^4$  Дж/кг  
 плавления льда  $3,3 \cdot 10^5$  Дж/кг

## НОРМАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

давление –  $10^5$  Па, температура – 0 °С

## МОЛЯРНАЯ МАССА

азота  $28 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 аргона  $40 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 водорода  $2 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 воздуха  $29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 воды  $18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 гелия  $4 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 кислорода  $32 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 лития  $6 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 неона  $20 \cdot 10^{-3}$  кг/моль  
 углекислого газа  $44 \cdot 10^{-3}$  кг/моль

## ЧАСТЬ 1

**Ответами к заданиям 1–24 являются слово, число или последовательность цифр или чисел. Запишите ответ в поле ответа в тексте**

работы, а затем перенесите в **БЛАНК ОТВЕТОВ №1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерения физических величин писать не нужно.

1. На рисунке 1 показан график зависимости от времени для проекции  $v_x$  скорости тела. Какова проекция  $a_x$  ускорения этого тела в интервале времени от 5 до 6 с?

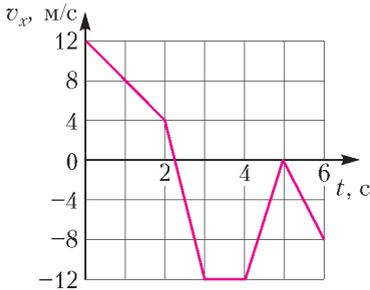


Рис. 1

2. По горизонтальному полу по прямой равномерно тянут ящик, приложив к нему горизонтальную силу 35 Н. Коэффициент трения скольжения между полом и ящиком равен 0,25. Чему равна масса ящика?

3. Под действием постоянной силы, равной по модулю 30 Н, тело движется в инерциальной системе отсчета по прямой в одном направлении. За какое время импульс тела уменьшится от 100 до 40 кг·м/с?

4. Какова глубина вертикальной шахты, если звук выстрела, произведенного у входа в шахту на поверхности земли, вернулся к стрелку, отразившись от дна шахты, через 0,5 с после выстрела? Скорость звука в воздухе считать равной 340 м/с.

5. Два одинаковых бруска толщиной 5 см и массой 1 кг каждый, связанные друг с другом, плавают в воде так, что уровень воды приходится на границу между ними (рис.2). Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения.

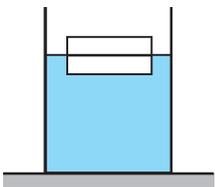


Рис. 2

- 1) Плотность материала, из которого изготовлены бруски, равна 1000 кг/м<sup>3</sup>.

2) Сила Архимеда, действующая на бруски, равна 20 Н.

3) Если воду заменить на керосин, то глубина погружения брусков увеличится.

4) Если на верхний брусок положить груз массой 0,5 кг, то бруски утонут.

5) Если в стопку добавить еще один такой же брусок, то глубина ее погружения увеличится на 5 см.

6. Высота полета искусственного спутника над Землей увеличилась с 300 до 400 км. Как изменились при этом период обращения спутника и скорость его движения по орбите?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась;
- 2) уменьшилась;
- 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

7. Тело движется вдоль оси  $x$ , при этом его координата изменяется с течением времени в соответствии с формулой  $x(t) = 5 - 4t^2$  (все величины выражены в СИ).

Установите соответствие между графиками и физическими величинами, зависимости которых от времени эти графики могут представлять (рис.3).

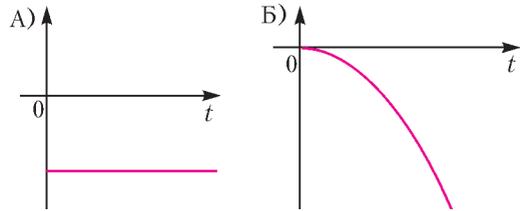


Рис. 3

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ГРАФИКИ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А)	1) проекция скорости тела $v_x$
	2) проекция перемещения тела $s_x$
Б)	3) проекция ускорения тела $a_x$
	4) модуль равнодействующей $\vec{F}$ сил, действующих на тело

8. При понижении абсолютной температуры средняя кинетическая энергия хаотического теплового движения молекул разрежен-

ного одноатомного газа уменьшилась в 3 раза. Начальная температура газа 600 К. Какова конечная температура газа?

9. Тепловая машина за цикл получает от нагревателя количество теплоты, равное 100 Дж, и совершает работу 40 Дж. Чему равен КПД тепловой машины (в %)?

10. На рисунке 4 показан график изменения температуры вещества, находящегося в

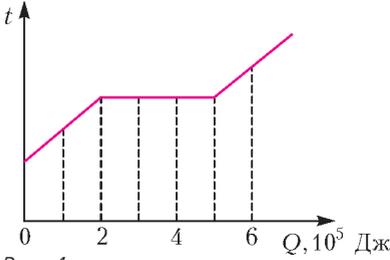


Рис. 4

сосуде под поршнем, по мере поглощения им количества теплоты. Масса вещества 1,5 кг. Первоначально вещество было в жидком состоянии. Какова удельная теплота парообразования вещества (в кДж/кг)?

11. На  $pV$ -диаграмме (рис.5) показаны два процесса, проведенные с одним и тем же количеством газообразного аргона.

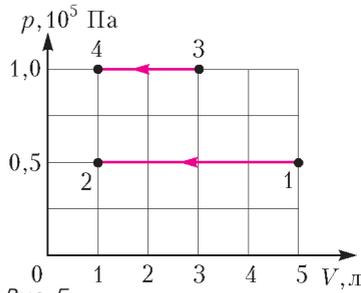


Рис. 5

Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения, характеризующих процессы на графике.

- 1) Работа, совершенная внешними силами над аргоном, в процессах 1–2 и 3–4 одинакова.
- 2) В процессе 3–4 абсолютная температура аргона изобарно уменьшилась в 5 раз.
- 3) В процессе 1–2 давление аргона в 2 раза больше, чем в процессе 3–4.
- 4) В процессе 1–2 аргон изобарно увеличил свой объем на 4 л.
- 5) В процессе 1–2 внутренняя энергия аргона уменьшилась в 5 раз.

12. Один моль одноатомного идеального газа участвует в процессе 1–2–3, график которого изображен на рисунке 6 в координатах  $p, T$ , где  $p$  – давление газа,  $T$  – абсолютная температура газа. Как изменяются объем газа  $V$  в ходе процесса 1–2 и плотность газа  $\rho$  в ходе процесса 2–3?

Рис. 6

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличивается; 2) уменьшается; 3) не изменяется.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

13. Квадратная проволочная рамка расположена в однородном магнитном поле так, как показано на рисунке 7. Направление тока в рамке показано стрелками.

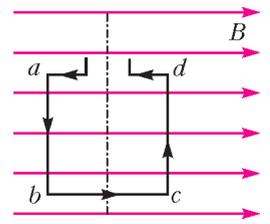


Рис. 7

Куда направлена относительно рисунка (**вправо, влево, вверх, вниз, к наблюдателю, от наблюдателя**) сила, действующая на сторону  $ab$  рамки со стороны внешнего магнитного поля  $\vec{B}$ ? Ответ запишите словом (словами).

14. Одинаковые отрицательные точечные заряды, модуль которых  $|q| = 2 \cdot 10^{-8}$  Кл, расположены в вакууме на расстоянии 3 м друг от друга. Определите модуль сил взаимодействия этих зарядов друг с другом (в мкН).

15. Энергия магнитного поля катушки с током равна 0,64 Дж. Индуктивность катушки равна 20 мГн. Какова сила тока в катушке?

16. Алюминиевый проводник АБ подвешен на тонких медных проволочках и подключен к источнику постоянного напряжения – так, как показано на рисунке 8. Справа от проводника находится северный полюс постоянного магнита. Ползунок реостата плавно перемещают **вправо**.

Из приведенного ниже списка выберите **два** правильных утверждения.

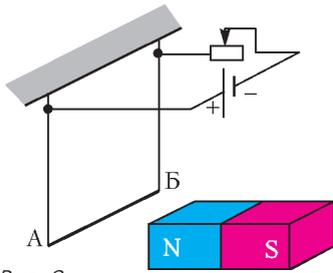


Рис. 8

- 1) Сопротивление реостата увеличивается.
- 2) Линии индукции магнитного поля, созданного магнитом, вблизи проводника АБ направлены влево.
- 3) Сила Ампера, действующая на проводник АБ, увеличивается.
- 4) Силы натяжения проволочек, на которых подвешен проводник АБ, уменьшаются.
- 5) Сила тока, протекающего по проводнику АБ, увеличивается.

17. При настройке колебательного контура генератора, задающего частоту излучения радиопередатчика, емкость его конденсатора увеличили. Как при этом изменились частота излучаемых волн и длина волны излучения?

Для каждой величины определите соответствующий характер изменения:

- 1) увеличилась; 2) уменьшилась; 3) не изменилась.

Запишите в таблицу выбранные цифры для каждой физической величины. Цифры в ответе могут повторяться.

18. Установите соответствие между формулами для расчета физических величин в цепях постоянного тока и названиями этих величин. В формулах использованы обозначения:  $R$  – сопротивление резистора;  $I$  – сила тока;  $U$  – напряжение на резисторе.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

ФОРМУЛЫ	ФИЗИЧЕСКИЕ ВЕЛИЧИНЫ
А) $\frac{U}{I}$	1) сила тока
Б) $IR$	2) напряжение на резисторе
	3) мощность тока
	4) сопротивление резистора

19. Ядро бериллия может захватить альфа-частицу, в результате чего происходит

ядерная реакция  ${}^4_2\text{He} + {}^9_4\text{Be} \rightarrow {}^A_Z\text{X} + {}^1_0\text{n}$  с образованием ядра химического элемента  ${}^A_Z\text{X}$ . Каковы заряд образовавшегося ядра  $Z$  (в единицах элементарного заряда) и его массовое число  $A$ ?

**В бланк ответов №1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

20. Из ядер платины  ${}^{197}_{78}\text{Pt}$  при  $\beta^-$ -распаде с периодом полураспада 20 часов образуются стабильные ядра золота. В момент начала наблюдения в образце содержится  $8 \cdot 10^{20}$  ядер платины. Через какую из точек, кроме начала координат, пройдет график зависимости числа ядер **золота** от времени (рис.9)?

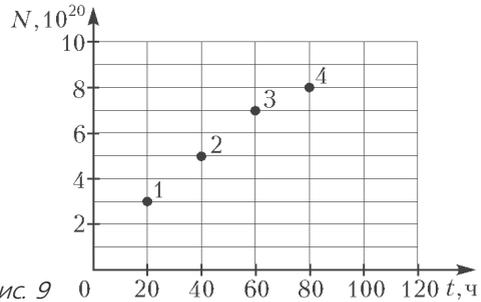


Рис. 9

21. На рисунке 10 изображена упрощенная диаграмма нижних энергетических уровней атома. Нумерованными стрелками отмечены некоторые возможные переходы атома между этими уровнями. Какой из этих четырех переходов связан с поглощением света наименьшей частоты, а какой – с излучением света наибольшей частоты?

Установите соответствие между процессами поглощения и испускания света и стрелками, указывающими энергетические переходы атома.

К каждой позиции первого столбца подберите соответствующую позицию из второго столбца и запишите в таблицу выбранные цифры под соответствующими буквами.

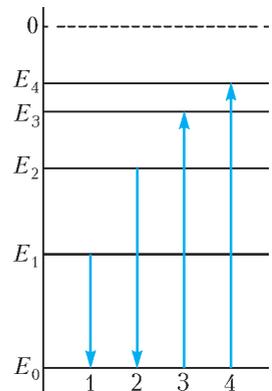


Рис. 10

## ПРОЦЕССЫ

- А) поглощение света наименьшей частоты  
 Б) излучение света наибольшей частоты

## ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ ПЕРЕХОДЫ

- 1) 1  
 2) 2  
 3) 3  
 4) 4

22. Чему равна сила тока в лампочке (рис. 11), если погрешность прямого измерения

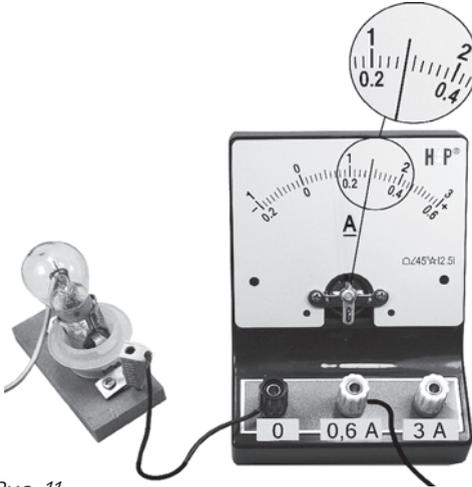


Рис. 11

ния силы тока амперметром на пределе измерения 3 А равна  $\Delta I_1 = 0,15$  А, а на пределе измерения 0,6 А равна  $\Delta I_2 = 0,03$  А?

**В бланк ответов №1 перенесите только числа, не разделяя их пробелом или другим знаком.**

23. Необходимо экспериментально изучить зависимость силы Архимеда, действующей на тело, погруженное в жидкость, от плотности жидкости.

Какие **две** установки (рис. 12) следует использовать для проведения такого исследования?

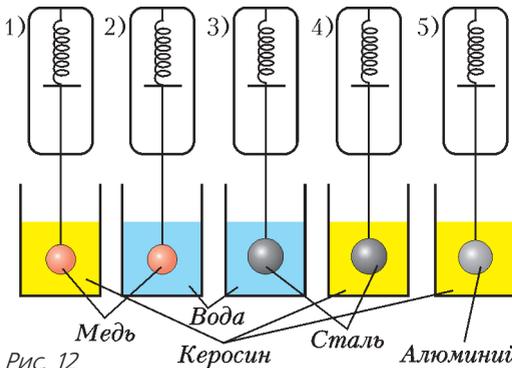


Рис. 12

24. Рассмотрите таблицу (см. с. 47), содержащую характеристики планет Солнечной системы.

Выберите **два** утверждения, которые соответствуют характеристикам планет.

- 1) Среднее расстояние от Солнца до Юпитера составляет 300 млн км.
- 2) Ускорение свободного падения на Нептуне около  $11,4 \text{ м/с}^2$ .
- 3) Ускорение свободного падения на Уране составляет  $15,1 \text{ м/с}^2$ .
- 4) Объем Юпитера почти в 3 раза больше объема Нептуна.
- 5) На Меркурии не наблюдается смены времен года.

## ЧАСТЬ 2

**Ответом к заданиям 25–27 является число. Запишите это число в поле ответа в тексте работы, а затем перенесите в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждый символ пишете в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке обозначениями. Единицы измерения физических величин писать не нужно.**

25. Два груза, связанные нерастяжимой и невесомой нитью, движутся по гладкой горизонтальной поверхности под действием постоянной горизонтальной силы  $\vec{F}$ , приложенной к грузу массой  $M_1 = 2$  кг (рис. 13).

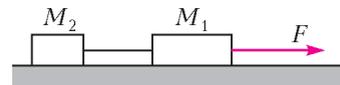


Рис. 13

Нить обрывается при значении силы натяжения нити 4 Н, при этом модуль силы  $\vec{F}$  равен 12 Н. Чему равна масса  $M_2$  второго груза?

26. В стакан калориметра, содержащий 351 г воды, опустили кусок льда массой  $m$ , имевший температуру  $0^\circ\text{C}$ . Начальная температура калориметра и воды  $45^\circ\text{C}$ . В момент времени, когда наступило тепловое равновесие, температура воды и калориметра стала равной  $5^\circ\text{C}$ . Чему равна масса  $m$  (в г)? Теплоемкостью калориметра пренебречь.

27. Лазер излучает в импульсе  $10^{19}$  световых квантов. Средняя мощность импульса лазера 1100 Вт при длительности вспышки

Название планеты	Среднее расстояние от Солнца (в а.е.)	Диаметр в районе экватора, км	Наклон оси вращения	Первая космическая скорость, км/с
Меркурий	0,39	4879	0,6'	3,01
Венера	0,72	12104	177°22'	7,33
Земля	1,00	12756	23°27'	7,91
Марс	1,52	6794	25°11'	3,55
Юпитер	5,20	142984	3°08'	42,1
Сатурн	9,58	120536	26°44'	25,1
Уран	19,19	51118	97°46'	15,1
Нептун	30,02	49528	28°19'	16,8

$3 \cdot 10^{-3}$  с. Определите длину волны излучения лазера. Ответ выразите в микрометрах.

**Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.**

**Для записи ответов на задания 28–32 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер задания (28, 29 и т. д.), а затем решение соответствующей задачи. Ответы записывайте четко и разборчиво.**

**28.** Прямой проводник с током и проводящая рамка лежат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции однородного магнитного поля (рис.14). Опираясь на законы физики, укажите направление силы, действующей на рамку, когда величина магнитной индукции  $\vec{B}$  уменьшается.

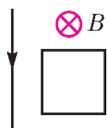


Рис. 14

**Полное правильное решение каждой из задач 29–32 должно содержать законы и формулы, применение которых необходимо и достаточно для решения задачи, а также математические преобразования, расчеты с численным ответом и при необходимости рисунок, поясняющий решение.**

**29.** Снаряд массой 4 кг, летящий со скоростью 400 м/с, разбивается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличи-

лась на 0,5 МДж. Найдите скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда.

**30.** Идеальный одноатомный газ в количестве 1 моль сначала изотермически расширился

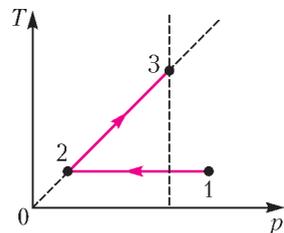


Рис. 15

( $T_1 = 300$  К). Затем газ изохорно нагрели, повысив его давление в 3 раза. Какое количество теплоты получил газ на участке 2–3 (рис.15)?

**31.** Батарея из четырех конденсаторов емкостями  $C_1 = 2C$ ,  $C_2 = C$ ,  $C_3 = 4C$  и  $C_4 = 2C$  подключена к источнику постоянного тока с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (рис.16). Определите энергию конденсатора емкостью  $C_1$ .

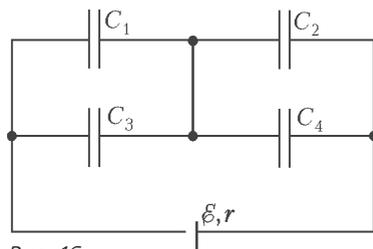


Рис. 16

**32.** В дно водоема глубиной 3 м вертикально вбита свая, целиком скрытая под водой. Угол падения солнечных лучей на поверхность воды равен  $30^\circ$ . Свая отбрасывает на дно водоема тень длиной 0,75 м. Постройте ход лучей, определяющих тень от сваи на дне, и определите высоту сваи. Показатель преломления воды  $n = \frac{4}{3}$ .

**Избранные задачи из других вариантов открытого сегмента**

**1.** На горизонтальном столе лежит деревянный брусок. Коэффициент трения между поверхностью стола и бруском  $\mu = 0,1$ . Если приложить к бруску силу, направленную вверх под углом  $\alpha = 45^\circ$  к горизонту, то

брусok будет двигаться по столу равномерно и прямолинейно. С каким ускорением будет двигаться этот брусok по столу, если приложить к нему такую же по модулю силу, направленную вверх под углом  $\beta = 30^\circ$  к горизонту? Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на брусok.

2. По гладкой наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, скользит из состояния покоя брусok массой  $M = 250$  г. В тот момент, когда брусok прошел по наклонной плоскости расстояние  $x = 3,6$  м, в него попала и застряла в нем летящая навстречу ему вдоль наклонной плоскости пуля массой  $m = 5$  г. После попадания пули брусok поднялся вверх вдоль наклонной плоскости на расстояние  $s = 2,5$  м от места удара. Найдите скорость пули перед попаданием в брусok. Трение бруска о плоскость не учитывать.

3. Два тела подвешены за нерастяжимую и невесомую нить к идеальному блоку, как

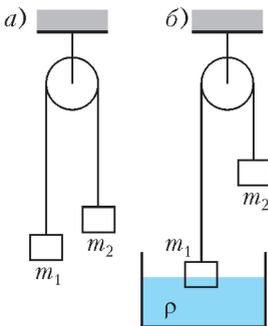


Рис. 17

показано на рисунке 17,а. При этом первое тело массой  $m_1 = 500$  г движется из состояния покоя вниз с ускорением  $a$ . Если первое тело опустить в воду плотностью  $\rho = 1000$  кг/м<sup>3</sup>, находящуюся в большом объеме (рис.17,б), система

будет находиться в равновесии. При этом объем погруженной в воду части тела равен  $V = 1,5 \cdot 10^{-4}$  м<sup>3</sup>. Сделайте рисунки с указанием сил, действующих на тела в обоих случаях. Определите ускорение  $a$  первого тела.

4. Батарея из четырех конденсаторов емкостями  $C_1 = 2C$ ,  $C_2 = C$ ,  $C_3 = 4C$  и  $C_4 = 2C$  подключена к источнику постоянного напряжения с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$  (см. рис.16). На сколько и как изменится общая энергия, запасенная в батарее, если в конденсаторе емкостью  $C_3$  возникнет пробой?

5. К аккумулятору с ЭДС 50 В и внутренним сопротивлением 4 Ом подключили лампу сопротивлением 10 Ом и резистор сопротивлением 15 Ом, а также конденсатор ем-

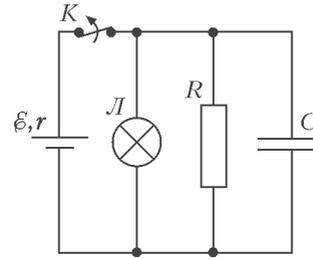


Рис. 18

костью 100 мкФ (рис.18). Спустя длительный промежуток времени ключ  $K$  размыкают. Какое количество теплоты выделится после этого на лампе?

6. На железном стержне намотаны две катушки изолированного медного провода А и Б. Катушка А подключена к источнику с ЭДС  $\mathcal{E}$  и внутренним сопротивлением  $r$ , как показано на рисунке 19. Катушка Б замкну-

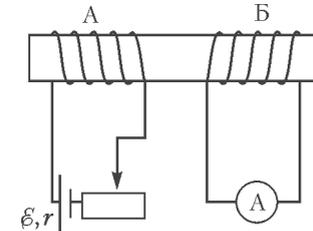


Рис. 19

та на амперметр малого сопротивления. Ползунок реостата передвигают влево. В каком направлении протекает при этом ток через амперметр, подключенный к катушке Б? Ответ обоснуйте, указав, какие явления и закономерности Вы использовали для объяснения.

7. В плоскости, параллельной плоскости тонкой собирающей линзы, по окружности со скоростью  $v = 5$  м/с движется точечный источник света. Расстояние между плоскостями  $d = 15$  см. Центр окружности находится на главной оптической оси линзы. Фокусное расстояние линзы  $F = 10$  см. Найдите скорость движения изображения точечного источника света. Сделайте пояснительный чертеж, указав на нем ход лучей в линзе.

*Публикацию подготовили  
М.Демидова, А.Черноуцан*

# Як вам травною прораству

*В. ПТУШЕНКО*

**Ж**ИТЕЛЯМ ГОРОДОВ ПРИВЫЧНО ВИДЕТЬ, как хрупка и беззащитна природа перед натиском цивилизации. Но тем более необычно наблюдать, как она способна восстанавливаться, преодолевая самые невероятные барьеры. Удивительно, как нежный, мягкий стебелек растения пробивается через асфальт, выдерживающий напор тысяч колес. Не менее удивительно и то, что растения могут селиться на стенах. Травинки, пробивающиеся через щели между кирпичами или каменными плитами облицовки зданий, можно наблюдать в городе на стенах вполне жилых, «действующих» зданий. Там же, где влияние человека меньше – на верхних этажах и крышах или на стенах заброшенных строений, – можно встретить порой целые рощицы (рис. 1).



Рис. 1

Одно из принципиальных условий для жизни растений – наличие необходимых для роста минеральных элементов в той среде, в которой находятся его корни. Стены заброшенных церквей, например, чаще всего сделаны из красного кирпича. Основным сырьем для него служит глина – конечно, не самый плодородный вариант почвы, но все же содержащий многие элементы, являющиеся первостепенными для растения: элементы металлов (в виде оксидов) – калия, натрия, кальция, магния, железа, а также серу. Из жизненно важных элементов в этом списке не хватает азота и фосфора.

С необходимостью внесения в почву азотных удобрений человеку приходится сталкиваться и в обычной среде роста растений. В дикой природе азот попадает в почву благодаря деятельности микроорганизмов – бактерий, способных превращать в органические вещества азот воздуха. Огородники хорошо знают, что такие бактерии содержатся в клубеньках бобовых растений. Однако этим полезным делом способны заниматься и свободноживущие бактерии, в частности фотосинтезирующие цианобактерии, готовые поселиться где угодно – в водоемах, на поверхности почвы, на стенах, на стенках аквариумов и горшков с домашними растениями, образуя зеленый налет. Вполне возможно, что именно они, поселяясь рядом со злаками или молодыми березками, обеспечивают приток азота в среду жизни своих соседей.

Сложнее обстоит дело с фосфором. Может быть, его заносят животные – муравьи, мыши, птицы? Впрочем, и в этом отношении условия жизни на стене не сильно отличаются от жизни в обычной почве – там тоже всегда плохо с фосфором. Кроме того, все необходимые элементы, включая фосфор, содержатся и в цементе, скрепляющем кирпичи.

Конечно, говоря о химическом составе кирпичного субстрата, мы упустили один важный этап: нужно еще, чтобы кирпич превратился в подходящую для роста растений рыхлую среду. Отчасти это происходит в силу естественной эрозии – под действием атмосферных осадков. Кроме того, «стартовую площадку» для семян растений могут создать и скопления пыли – т.е. частичек того же самого грунта, заметенного ветром в щели между кирпичами или пли-

тами. А дальше уже растение, подкисляя пространство вокруг своих корней и с усилием (используя силы осмоса) пробивая их вперед, само способно постепенно разрушать твердый строительный материал, превращая его в более рыхлый, в котором легче удерживается влага. Так что проблема водного питания также постепенно решается, хотя иссушается эта среда в летнее время все же сильнее, чем почва. А зимой она сильнее промерзает, и это еще одно испытание для корней обитателей стен.

Однако это – закрепление на уже занятом участке, а сначала нужно еще заселить его. Интересно посмотреть, какие растения чаще всего поселяются на стенах. Из деревьев обычно это береза, обладающая очень мелкими летучими семенами (рис.2). Из травя-



Рис. 2

нистых растений обычны мхи и папоротники, которые распространяются еще более легкими спорами, иван-чай с хохлатыми (с «парашютиками») семенами и другие растения-первопроходцы (рис.3).

Как видно, удивительные способности растений выживать в неподходящих, на первый взгляд, условиях, вполне объяснимы. Тем не менее, даже после этих объяснений фотография, приведенная здесь на рисунке 4 и на четвертой странице обложки журнала, выглядит невероятной. Причем автомобиль, у которого почти на лобовом стекле вырос этот маленький зеленый побег, отнюдь не



Рис. 3



Рис. 4

старый и заброшенный, а современный, хорошо ухоженный и, очевидно, регулярно используемый своими хозяевами. А значит, чтобы вырасти на пылевом субстрате, у ростка было всего несколько дней. Да и количество этого субстрата, которое могло успеть накопиться в какой-нибудь щели кузова, совсем мизерное.

*Автор благодарен В.В.Чубу за советы и критические замечания.*

# ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

## «КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

### ЗАДАЧИ

(см. «Квант» №8)

1. Петр – муж сестры отца Сидора.

2.  $\sqrt{x^3}$ .

Пусть в покрашенной клетке стоит число  $a$ . После возведения в квадрат оно станет числом  $a^2$ . После еще одного возведения в квадрат получим  $a^4$ . После извлечения корня третьей степени –  $\sqrt[3]{a^4}$ . Извлекаем квадратный корень, получаем  $\sqrt[3]{a^2}$ . Чтобы замкнуть круг и получить из этого

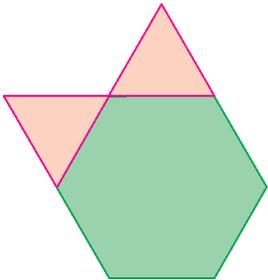


Рис. 1

выражения  $a$ , надо возвести его в третью степень и извлечь квадратный корень.

3. Например, как на рисунке 1.

4. 71111111.

На каждую цифру уходит хотя бы по 2 спички, поэтому 9-значное число сделать не получится. Чтобы

составить 8-значное число из 17 спичек, необходимо использовать 7 цифр из двух спичек и одну цифру из трех спичек. Из двух спичек можно сделать только цифру 1, а из трех – только цифру 7. Упорядочив их так, чтобы полученное число было наибольшим, получим ответ.

## XXV МЕЖДУНАРОДНАЯ ОЛИМПИАДА «ТУЙМААДА». ФИЗИКА

1. Поворот вокруг любой горизонтальной оси, проходящей через центр верхней пластины, можно представить в виде суперпозиции поворотов вокруг двух горизонтальных осей, проходящих через середины противоположных сторон этой пластины, поэтому достаточно исследовать устойчивость положения равновесия относительно поворота вокруг одной из таких осей.

Пусть  $\varphi$  – малый угол поворота верхней пластины вокруг оси, проходящей через середины противоположных сторон этой пластины. Тогда момент силы тяжести кубиков относительно центра пластины имеет вид

$$M_1 = Nmg \frac{Na\varphi}{2} = \frac{1}{2} mga\varphi N^2,$$

а суммарный момент сил упругости всех четырех пружин задается формулой

$$M_2 = 4 \left( k \frac{a\varphi}{2} \right) \frac{a}{2} = ka^2\varphi.$$

Положение равновесия будет устойчивым, если возвращающий момент  $M_2$  будет больше отклоняющего момента  $M_1$ :

$$ka^2\varphi > \frac{1}{2} mga\varphi N^2, \text{ откуда } N < \sqrt{\frac{2ka}{mg}}.$$

Таким образом, окончательный ответ таков:

$$N = \left[ \sqrt{\frac{2ka}{mg}} \right],$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

2. Минимальная необходимая для вынимания шаров работа равна изменению потенциальной энергии системы, которое складывается из увеличения энергии шаров и уменьшения энергии жидкостей, так как их центры масс опускаются, когда жидкости занимают объем, ранее вытесненный шарами. Если размер сосуда позволяет шарам поместиться, имея центры на одной высоте, то можно вынуть шары так, что они будут касаться поверхности верхней жидкости. Однако если сосуд слишком узкий,  $a$  меньше некоторого  $a_0$ , то центр верхнего шара будет всегда выше центра нижнего шара. Разность  $\Delta h$  высот центров шаров будет минимальной, когда шары касаются стенок сосуда и друг друга, т.е. центр одного шара находится на расстоянии  $R_1$  от двух перпендикулярных стенок сосуда, а центр другого – на расстоянии  $R_2$  от двух других стенок. Поскольку расстояние между центрами касающихся шаров равно сумме их радиусов, можно записать трехмерную теорему Пифагора:

$$\Delta h^2 + (a - R_1 - R_2)^2 + (a - R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2,$$

откуда находим искомое различие высот:

$$\Delta h = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 - 2(a - R_1 - R_2)^2}$$

и условие, при котором оно возникает:

$$a < a_0 = \frac{2 + \sqrt{2}}{2} (R_1 + R_2).$$

Для расчета изменения потенциальной энергии верхнего шара потребуются разность  $\Delta H$  высот нижних точек шаров:

$$\Delta H = \Delta h + R_1 - R_2, \text{ если } a < a_0,$$

$$\text{и } \Delta H = 0, \text{ если } a \geq a_0.$$

Из условия постоянства объемов жидкостей выразим толщины  $h_1$  и  $h_2$  слоев жидкостей после вынимания шаров:

$$h_1 = 2R_1 - \frac{4\pi R_1^3}{3a^2}, \quad h_2 = 2R_2 - \frac{4\pi R_2^3}{3a^2},$$

используя которые, найдем изменения потенци-

альных энергий жидкостей:

$$\Delta W_1 = -a^2 h_1 w_1 g \left( R_1 - \frac{h_1}{2} \right),$$

$$\Delta W_2 = -a^2 h_2 w_2 g \left( 2R_1 + R_2 - h_1 - \frac{h_2}{2} \right).$$

Изменения потенциальных энергий шаров равны

$$\Delta E_1 = \frac{4}{3} \pi R_1^3 \rho_1 g (h_1 + h_2),$$

$$\Delta E_2 = \frac{4}{3} \pi R_2^3 \rho_2 g (h_1 + h_2 - 2R_1 + \Delta H).$$

Теперь запишем суммарное изменение потенциальной энергии системы:

$$\Delta E = \Delta W_1 + \Delta W_2 + \Delta E_1 + \Delta E_2.$$

Заметим, что возможна ситуация (маленький тяжелый верхний шар находится в узком сосуде), когда из-за отрицательного значения  $\Delta E_2$  полное изменение  $\Delta E$  тоже окажется отрицательным, однако необходимая работа не может быть отрицательной, поэтому окончательный ответ имеет вид

$$A = \max(\Delta E; 0).$$

**3.** 1) Работа  $A$  газа за цикл равна площади, ограниченной графиком цикла в  $pV$ -координатах:

$$A = pV.$$

Подведенное за цикл количество теплоты  $Q_1$  выразим, применив первое начало термодинамики для изохорического нагревания и изобарического расширения:

$$Q_1 = \frac{5}{2}(2p \cdot 2V - p \cdot V) + 2p \cdot (2V - V) = \frac{19}{2} pV.$$

Искомый КПД найдем по определению:

$$\eta_1 = \frac{A}{Q_1} = \frac{2}{19}.$$

2) Молекула озона состоит из трех атомов и не является линейной, а потому имеет три вращательных степени свободы. Из условия сохранения массы при описанном превращении кислорода в озон следует, что кислород в количестве  $v$  молей превращается в озон в количестве  $2v/3$  молей. Пусть  $p_1$ ,  $T_1$  и  $p_2$ ,  $T_2$  – давление и температура до и после превращения соответственно,  $V_0$  – объем, одинаковый до и после превращения, тогда из условия неизменности внутренней энергии  $U$  можно записать

$$U = \frac{5}{2} v R T_1 = \frac{6}{2} \cdot \frac{2}{3} v \cdot R T_2, \quad U = \frac{5}{2} P_1 V_0 = \frac{6}{2} P_2 V_0,$$

откуда находим

$$k_1 = \frac{T_2}{T_1} = \frac{5}{4}, \quad k_2 = \frac{p_2}{p_1} = \frac{5}{6}.$$

3) При описанном превращении не совершается работа, так как не изменяется объем, что с уче-

том неизменности внутренней энергии означает (согласно первому началу термодинамики) отсутствие теплообмена. Однако при этом превращении газ скачкообразно переходит в новое состояние на той же изохоре, что позволяет уменьшить теплообмен с нагревателем и холодильником: в ходе повышения давления при постоянном объеме  $V$  нужно превращать озон в кислород, а в ходе понижения давления при постоянном объеме  $2V$  – кислород в озон. Из-за неизменности внутренней энергии при превращении неважно, в какой именно момент выполнять превращение, поэтому можно считать, что при объеме  $V$  озон под давлением  $p$  превращается в кислород под давлением  $1,2p$ . Подведенное за цикл количество теплоты равно

$$Q_2 = \frac{5}{2}(2p \cdot 2V - 1,2p \cdot V) + 2p \cdot (2V - V) = 9pV.$$

Искомый КПД равен

$$\eta_2 = \frac{A}{Q_2} = \frac{1}{9}.$$

Превращение кислорода в озон – это эндотермическая химическая реакция, для осуществления которой нужно количество теплоты, десятой доли которого хватило бы для нагревания кислорода более чем на тысячу градусов. Если учесть это количество теплоты, КПД упадет практически до нуля, т.е. никакого «улучшения» не будет и в помине.

**4.** Искомое центростремительное ускорение найдем по формуле  $a = \omega^2 r$ , где  $\omega$  – угловая скорость поворота вектора скорости, совпадающая с угловой скоростью поворота вектора напряженности электрического поля. Выберем начало системы координат в середине отрезка, соединяющего заряды, ось  $x$  направим в сторону отрицательного заряда, обозначив его  $-q$ , а ось  $y$  направим в сторону точки  $A$ , в которой находилась пчелка, когда она была равноудалена от зарядов. Напряженность поля в точке  $A$  направлена вдоль оси  $x$  и равна

$$E_x = 2 \frac{kq}{r^2} \frac{l}{r} = \frac{2kql}{r^3},$$

где  $r$  – расстояние от точки  $A$  до каждого из зарядов. При смещении пчелки из точки  $A$  на малое расстояние  $x$  вдоль силовой линии можно пренебречь изменением  $E_x$ , но нельзя пренебречь изменением  $E_y$ , так как до смещения эта составляющая поля была нулевой. Обозначив через  $y$  координату точки  $A$ , запишем  $E_y$  в виде

$$E_y = \frac{kq}{(l+x)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(l+x)^2 + y^2}} - \frac{kq}{(l-x)^2 + y^2} \frac{y}{\sqrt{(l-x)^2 + y^2}}.$$

Используя соотношение  $r^2 = l^2 + y^2$  и приближенную формулу из условия, преобразуем полученное выражение:

$$E_y = \frac{kqy}{r^3} \left( \left(1 + \frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2} - \left(1 - \frac{2lx}{r^2}\right)^{-3/2} \right) = -\frac{6kqlxy}{r^5}.$$

Отсюда найдем угол поворота вектора напряженности при смещении:

$$\varphi = \left| \frac{E_y}{E_x} \right| = \frac{3xy}{r^2}.$$

Пусть  $t$  – время смещения пчелки, тогда можно записать

$$\omega = \frac{\varphi}{t} = \frac{3yv}{r^2} = \frac{3v}{l} \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{3v}{2l} \sin \gamma,$$

где  $x = vt$ ,  $\sin \frac{\gamma}{2} = \frac{l}{r}$ ,  $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{y}{r}$ . Таким образом, окончательный ответ имеет вид

$$a = \frac{3v^2}{2l} \sin \gamma.$$

5. 1) Пусть падающая волна достигла некоторых точек  $A$  и  $B$  одновременно (т.е. они принадлежат одному волновому фронту, перпендикулярному направлению распространения волны) и точка  $A$  лежит на зеркале в этот момент времени (назовем его начальным), тогда отрезок  $AB$  образует с зеркалом угол  $\alpha$ . Допустим, что идущий через точку  $B$  луч встретился с движущимся зеркалом в точке  $C$  через некоторое время  $t$ , тогда можно заранее для дальнейших расчетов записать  $BC \perp AB$  и  $BC = ct$ , где  $c$  – скорость света. Отраженная от движущегося зеркала волна будет распространяться так же, как и волна, отраженная от эквивалентного неподвижного зеркала  $AC$ , поэтому искомый малый угол  $\varphi$  равен удвоенному углу между движущимся и эквивалентным зеркалами, что позволяет решить задачу чисто геометрически.

Пусть  $D$  – основание перпендикуляра, опущенного из точки  $C$  на зеркало в начальный момент времени, тогда  $CD \perp AD$  и  $CD = vt$ , так как зеркало сместилось на величину  $DC$  за время  $t$ . Проведем перпендикуляр  $DE$  из точки  $D$  к отрезку  $AB$  и перпендикуляр  $CF$  из точки  $C$  к отрезку  $DE$  и запишем

$$AD = \frac{ED}{\sin \alpha} = \frac{EF + FD}{\sin \alpha} = \frac{BC + CD \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{c + v \cos \alpha}{\sin \alpha} t.$$

Теперь найдем искомый угол:

$$\varphi = 2 \frac{CD}{AD} = 2 \frac{v \sin \alpha}{c + v \cos \alpha}.$$

2) Электромагнитную волну можно рассматривать как поток фотонов, каждый из которых имеет импульс  $h/\lambda_0$  в падающей волне и  $h/\lambda$  в отраженной, где  $h$  – постоянная Планка. Из условия сохранения проекции импульса на плоскость зеркала:

$$\frac{h}{\lambda_0} \sin \alpha = \frac{h}{\lambda} \sin(\alpha - \varphi)$$

находим длину отраженной волны:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin \alpha}.$$

*Замечание.* Эту задачу можно решить другим способом – используя преобразования Лоренца из специальной теории относительности.

### ЕГЭ ПО ФИЗИКЕ

#### Вариант 1

#### Ответы

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
-8	14	2	85	23	12	32	200	40	200	15	31

13	14	15	16	17	18	19	20	21
к наблюдателю	0,4	8	12	21	42	612	3	32

22	23	24	25	26	27
0,280,03	12	25	1	168	0,6

#### Указания и решения

**Задача 25.** Из второго закона Ньютона для первого груза найдем ускорение, затем из второго закона Ньютона для второго груза найдем его массу.

**Задача 26.** Массу льда  $m$  найдем из уравнения теплового баланса

$$\lambda m + c_B m (t^* - t_{пл}) + c_B m_B (t^* - t_B) = 0.$$

**Задача 27.** Длину волны найдем из определения средней мощности

$$P_{cp} = \frac{(hc/\lambda)N}{\Delta t}.$$

**Задача 28.** При изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную проводящим контуром, в контуре возникает индукционный ток  $I_i$ , направление которого определяется правилом Ленца, в нашем случае – по часовой стрелке (рис.2). В однородном магнитном поле на каждую сторону рамки действует сила Ампера. Ее направление находится по правилу левой руки, а величина – по формуле  $F_A = I_i B l \sin \alpha$ , где  $\alpha$  – угол между направлением тока в проводнике и магнитным полем. Так как

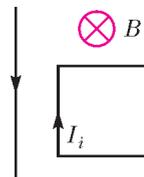


Рис. 2

рамка прямоугольная, а угол  $\alpha$  во всех случаях равен  $90^\circ$ , то силы, приложенные к противоположным сторонам рамки, равны по модулю и направлены взаимно противоположно. Результирующая сил, действующих на рамку со стороны однородного магнитного поля, равна нулю. Прямой проводник с током создает неоднородное магнитное поле, которое вблизи проводника сильнее, чем на удалении от него. Направление линий индукции этого поля в каждой точке рамки одинаково, оно определяется по правилу буравчика. В проводнике протекает постоянный ток, поэтому поле проводника постоянно и не влияет на индукционный ток в рамке. В магнитном поле проводника на каждую сторону рамки действует сила Ампера. Стороны рамки, перпендикулярные проводнику, расположены на одинаковом расстоянии от проводника. На них действуют силы, равные по модулю и направленные противоположно друг другу. Их сумма равна нулю. Силы, действующие на параллельные проводнику стороны рамки, направлены тоже противоположно друг другу. Однако из-за неоднородности поля проводник с током отталкивает ближнюю сторону рамки сильнее, чем притягивает более удаленную от него сторону. Результирующая этих сил отталкивает рамку от проводника. Согласно принципу суперпозиции, однородное магнитное поле и поле проводника с током действуют на рамку независимо друг от друга. Поэтому результирующая сила, приложенных к рамке, направлена вправо от проводника с током.

**Задача 29.** Запишем законы сохранения импульса и энергии:

$$2mv_0 = mv_{1x} + mv_{2x}, \\ 2m \frac{v_0^2}{2} + \Delta E = m \frac{v_{1x}^2}{2} + m \frac{v_{2x}^2}{2},$$

где  $2m$  – масса снаряда до взрыва,  $v_0$  – модуль скорости снаряда до взрыва,  $v_{1x}$ ,  $v_{2x}$  – проекции скоростей осколков ( $v_{1x} > v_{2x}$ ). Выразим  $v_{2x}$  из первого уравнения:  $v_{2x} = 2v_0 - v_{1x}$ , подставим во второе уравнение и получим

$$v_{1x}^2 - 2v_0v_{1x} + v_0^2 - \frac{\Delta E}{m} = 0.$$

Такое же уравнение получается и для  $v_{2x}$ . Из двух корней этого уравнения  $v_0 \pm \sqrt{\frac{\Delta E}{m}}$  для  $v_{1x}$  выбираем больший корень, а для  $v_{2x}$  – меньший, что соответствует условию  $v_{1x} > v_{2x}$ . Итак,

$$v_{1x} = v_0 + \sqrt{\frac{\Delta E}{m}} = 900 \text{ м/с}.$$

Отметим, что при  $\Delta E < 0,32$  МДж проекция

скорости второго осколка положительна, т.е. он также летит вперед.

Проще выглядит решение в системе отсчета, связанной со снарядом. Из закона сохранения импульса следует, что скорости осколков в этой системе одинаковы:  $u_1 = u_2 = u$ . Эту скорость найдем из закона сохранения энергии

$$2 \frac{mu^2}{2} = \Delta E,$$

после чего найдем искомые скорости из закона сложения скоростей  $v_{1x} = v_0 + u$ ,  $v_{2x} = v_0 - u$ .

**Задача 30.** На участке 2–3 процесс изохорный, поэтому  $A_{23} = 0$ ,  $Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{3}{2} \nu R (T_3 - T_2)$ . Из уравнения изохорного процесса следует  $\frac{T_3}{T_2} = \frac{p_3}{p_2} = 3$ . Поскольку  $T_2 = T_1$ , получаем

$$Q_{23} = \frac{3}{2} \nu R (3T_1 - T_1) = \\ = 3\nu RT_1 = 7479 \text{ Дж} \approx 7,5 \text{ кДж}.$$

**Задача 31.** Конденсаторы емкостями  $C_1$  и  $C_3$ ,  $C_2$  и  $C_4$  соединены в пары параллельно, а образовавшиеся пары соединены последовательно друг с другом. Значит, общая емкость системы равна

$$C_{\text{общ}} = \frac{C_{13}C_{24}}{C_{13} + C_{24}},$$

где  $C_{13} = C_1 + C_3 = 2C + 4C = 6C$ ,  $C_{24} = C_2 + C_4 = C + 2C = 3C$ . Получаем  $C_{\text{общ}} = 2C$ . Заряд на конденсаторах емкостями  $C_{13}$  и  $C_{24}$  такой же, как на конденсаторе емкостью  $C_{\text{общ}}$ :  $q = C_{\text{общ}}\mathcal{E} = 2C\mathcal{E}$ . Напряжение на первом конденсаторе такое же, как на конденсаторе емкостью  $C_{13}$ :  $U_1 = U_{13} = \frac{q}{C_{13}} = \frac{\mathcal{E}}{3}$ . Энергия, запасенная в конденсаторе емкостью  $C_1$ , равна

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C\mathcal{E}^2}{9}.$$

**Задача 32.** Длина тени  $L$  выражается через высоту сваи  $h$  и угол  $\gamma$  преломления лучей света

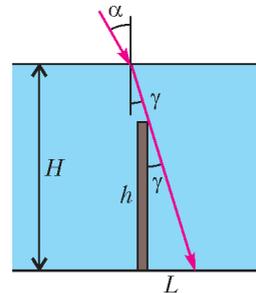


Рис. 3

(рис.3):  $L = h \operatorname{tg} \gamma$ . Согласно закону преломления,  $\sin \gamma = \frac{\sin \alpha}{n} = \frac{3}{8}$ . Получаем

$$L = \frac{h \sin \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 \gamma}} \approx 1,85 \text{ м.}$$

*Избранные задачи из других вариантов*

1.  $a = 0,2 \text{ м/с}^2$ .      2.  $v = 555 \text{ м/с}$ .
3.  $a = 1,8 \text{ м/с}^2$ .      4.  $\Delta W = \frac{C \xi^2}{2}$ .
5.  $Q = 27 \text{ МДж}$
6. Ток через амперметр направлен вправо.
7.  $v_{\text{из}} = 10 \text{ м/с}$ .

**ОЛИМПИАДА  
«ПОКОРИ ВОРОБЬЕВЫ ГОРЫ!»**

(см. «Квант» №8)

**МАТЕМАТИКА**

**Отборочный этап**

*Блиц-тур*

1. 66.

Значения  $x \in [0; 10]$  удовлетворяют неравенству, а при остальных значениях  $x$  исходное неравенство равносильно неравенству

$$x(x + 24 - x(x - 10)^2) \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x - 8)(x - (6 + \sqrt{33}))(x - (6 - \sqrt{33})) \leq 0.$$

Отсюда  $x \in [0; 6 + \sqrt{33}]$ , целые корни: 0, 1, 2, ..., 11.

2. 52,36.

Так как

$$\sin 2x - \sin 4x = -2 \cos 3x \sin x,$$

то

$$\cos 3x(1 + \cos 2x + 2 \sin x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1 - \sqrt{5}}{2} + \pi n, \quad k, n \in \mathbb{Z}.$$

В данный в условии отрезок попадают корни  $8\pi + \frac{\pi}{6}$  и  $\frac{17\pi}{2}$ , их сумма равна  $\frac{50\pi}{3} \approx 52,36$ .

3. 18.

Пусть  $D$  - середина  $OC$ . Тогда  $S_{\Delta B_1OC} = S_{\Delta B_1OD} + S_{\Delta B_1DC} = 2S_{\Delta B_1OD}$ . При этом стороны  $\Delta B_1OD$  равны  $OB_1 = \frac{m_b}{3}$ ,  $OD = \frac{m_c}{3}$ ,  $B_1D = \frac{AO}{2} = \frac{m_a}{3}$ .

4. -46,64.

Первое уравнение системы при  $x > -5$ ,  $x \neq -4$ ,  $y > 10$ ,  $y \neq 11$  равносильно уравнению

$$\log_{x+5}(y - 10) + \log_{y-10}(x + 5) = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_{x+5}(y - 10) = 1 \Leftrightarrow y = x + 15.$$

Подстановка во второе уравнение приводит к уравнению  $\log_{x+5}(-7 - 2x) + \log_{x+5}(2x + 9) = 2$ .

Решение:  $(x; y) = \left(-\frac{22}{5}; \frac{53}{5}\right)$ , а искомая величина равна  $-\frac{22 \cdot 53}{5 \cdot 5} = -46,64$ .

5. 8090.

Книга для брата выбирается 87 способами, для сестры - 93 способами. Получается  $87 \cdot 93 = 8091$  способ. Но нужно отсюда вычесть 1 случай, когда и брату, и сестре достается одна и та же книга.

*Творческое задание*

1. 88793.

В пересечении каждых двух множеств содержится ровно один элемент. Более того, в пересечении всех 2018 множеств содержится именно этот элемент (доказательство ниже). Тогда суммарное количество элементов будет равно  $2018 \cdot 44 + 1 = 88793$ .

*Доказательство.* Рассмотрим произвольное множество. Так как  $\frac{2018}{45} > 44$ , то с одним из элементов этого множества пересекутся, как минимум, 45 других множеств. Таким образом, получилось 46 множеств, пересекающихся по одному элементу. Но тогда любое другое множество или содержит данный элемент, или содержит по одному элементу из этих 46 множеств. Последнее невозможно, так как в множестве лишь 45 элементов.

2. 288.

Если  $[x] = 0$ , то решение:  $0 \leq x < 1$  при  $n = 1$ . Для  $x \geq 1$  уравнение  $x^{[x]} = n$  имеет решение при таких  $n$ , для которых выполняется неравенство  $[x]^{[x]} \leq n < [x + 1]^{[x]}$ .

Поэтому на множестве  $[x] = 1$  решения будут при  $n = 1$  ( $x = 1$ );

если  $[x] = 2$ , то решения будут при  $n = 4$  ( $x = 2$ ),  $n = 5$  ( $x = \sqrt{5}$ ), ...,  $n = 8$  ( $x = \sqrt{8}$ );

если  $[x] = 3$ , то решения будут при  $n = 27$  ( $x = 3$ ),  $n = 28$  ( $x = \sqrt[3]{28}$ ), ...,  $n = 63$  ( $x = \sqrt[3]{63}$ );

если  $[x] = 4$ , то решения будут при  $n = 256$  ( $x = 4$ ),  $n = 257$  ( $x = \sqrt[4]{257}$ ), ...,  $n = 500$  ( $x = \sqrt[4]{500}$ );

при  $x \geq 5$  получаем неравенство  $n \geq 5^5 = 3125 > 500$ , что противоречит условию задачи.

В итоге получаем:  $n = 1, 4, 5, 6, 7, 8, 27, 28, \dots, 62, 63, 256, 257, \dots, 500$ . Всего 288 чисел.

3. 4026.

Перепишем неравенство в виде

$$\frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{(x+1)(x-2)+2}} \leq \frac{2^{-|x|}}{\sqrt{\left(\frac{x}{2}+3\right)\left(\frac{x}{2}\right)+2}}.$$

Заметим, что оно определено на множестве  $(-\infty; -6] \cup [2; +\infty)$ .

Если левую часть обозначить через  $f(x)$ , то получается неравенство

$$f(x) \leq f\left(\frac{x}{2} + 2\right). \quad (*)$$

При этом функция

$$f(x) = \frac{4^{-|x-2|}}{\sqrt{(x+1)(x-2)} + 2} = \frac{1}{4^{|x-2|}(\sqrt{(x+1)(x-2)} + 2)}$$

возрастает при  $x \leq -1$  и убывает при  $x \geq 2$ .

При  $x \leq -6$  оба аргумента ( $x$  и  $\frac{x}{2} + 2$ ) принадлежат интервалу  $(-\infty; -1]$ , где функция  $f(x)$  возрастает, а неравенство  $(*)$  равносильно неравенству  $x \leq \frac{x}{2} + 2$ , которое выполняется на всем множестве  $x \leq -6$ .

Если  $x \geq 2$ , то и  $\frac{x}{2} + 2 \geq 2$ , а неравенство  $(*)$  в силу монотонного убывания функции  $f(x)$  равносильно неравенству  $x \geq \frac{x}{2} + 2$ , что приводит к решению  $x \geq 4$ .

Множеству  $[-2018; 2018]$  принадлежат  $x \in [-2018; -6] \cup [4; 2018]$ , и искомая сумма длин интервалов решения равна  $2012 + 2014 = 4026$ .  
4. 0,81.

Без ограничения общности рассуждений можно считать, что  $\angle BAC < \angle ACB$ ,  $R = BO = 12$ . Тогда по условию  $BH = 10$  и  $OH = 3$ . В треугольнике  $BOH$  известны все стороны, а его площадь равна  $S = \frac{5\sqrt{95}}{4}$ . Опустим из точки  $O$  перпендикуляры  $OH_1$  и  $OM$  на прямую  $BH$  и отрезок  $AC$  соответственно (рис. 4).

Из треугольника  $BOH$  найдем его высоту:

$$OH_1 = \frac{2S}{BH} = \frac{2 \cdot 5\sqrt{95}}{4 \cdot 10} = \frac{\sqrt{95}}{4}, \text{ откуда } MH = OH_1 = \frac{\sqrt{95}}{4}. \text{ По теореме Пифагора: } OM^2 =$$

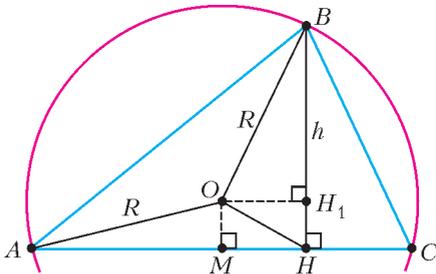


Рис. 4

$$= OH^2 - MH^2 = \left(\frac{7}{4}\right)^2, \quad AM^2 = AO^2 - OM^2 = \frac{41 \cdot 55}{16}. \text{ Тогда } AM = MC = \frac{\sqrt{41 \cdot 55}}{4}. \text{ Наконец,}$$

$$\angle ACB = \arctg\left(\frac{BH}{HC}\right) =$$

$$= \arctg\left(\frac{10 \cdot 4}{\sqrt{41 \cdot 55} - \sqrt{95}}\right) \approx 0,81446\dots$$

Заметим, что точка  $O$  в данном случае лежит вне  $\triangle ABC$ , но все вычисления остаются в силе.

5. 696.

Пусть  $k$  и  $n$  – номера комнат Незнайки и Знайки соответственно. По условию получаем, что  $k$  и  $n$  удовлетворяют соотношению  $n^2 + n = 2(k^2 + k)$ . После замены  $x = 2k + 1$ ,  $y = 2n + 1$  это соотношение сводится к виду

$$2x^2 - y^2 = 1.$$

Получилось так называемое уравнение Пелля. Построение всех натуральных решений уравнения основано на следующих соображениях.

1) Если  $(x_1; y_1)$ ,  $(x_2; y_2)$  – два различных решения и  $x_1 < x_2$ , то  $y_1 < y_2$ . Тем самым на множестве всех натуральных решений  $(x; y)$  уравнения можно ввести естественное упорядочение:  $(x_1; y_1) < (x_2; y_2) \Leftrightarrow \{x_1 < x_2; y_1 < y_2\}$ .

2) Пары  $(1; 1)$  и  $(5; 7)$  являются первым и вторым решениями уравнения (т.е. между этими решениями других решений нет).

3) Если  $(x; y)$  – решение, то пара  $f(x; y) = (3x + 2y; 4x + 3y)$  – тоже решение (причем большее  $(x; y)$ ). Отметим, что  $f(1; 1) = (5; 7)$  и пары  $(1; 1)$ ,  $(5; 7)$  начинают возрастающую последовательность пар решений уравнения.

Методом от противного можно доказать, что между парами решений  $(x; y)$  и  $f(x; y)$  в этой цепочке нет других решений уравнения.

Таким образом, рекуррентная последовательность пар

$$(x_1; y_1) = (1; 1), \dots$$

$$\dots, (x_k; y_k), (x_{k+1}; y_{k+1}) = (3x_k + 2y_k; 4x_k + 3y_k), \dots$$

исчерпывает множество всех натуральных решений уравнения. Находим несколько первых пар этой последовательности:  $x_2 = 5$ ,  $y_2 = 7$ ;  $x_3 = 29$ ,  $y_3 = 41$ ;  $x_4 = 169$ ,  $y_4 = 239$ ;  $x_5 = 985$ ,  $y_5 = 1393$ ;  $x_6 = 5741$ ,  $y_6 = 8119$ ; ...

Очевидно, что только пара  $x_5 = 985$ ,  $y_5 = 1393$  (и соответствующие значения  $k = 492$ ,  $n = 696$ ) удовлетворяют условиям задачи.

**Заключительный этап**

*Вариант 1*

1.  $2^6 \cdot 5^5$ .

Для искомого числа  $n$  выполнены равенства  $n = 2a^5$  и  $n = 5b^2$  ( $a, b \in \mathbb{Z}$ ). Следовательно,  $2a^5 = 5b^2$ . Отсюда следует, что  $a$  кратно 5, пусть  $a = 5p$ . Тогда  $2 \cdot 5^4 p^5 = b^2$ . Левая часть будет полным квадратом при минимальном  $p = 2$ . Поэтому  $b^2 = 2^6 \cdot 5^4$  и  $n = 2^6 \cdot 5^5$ .

2. 2.

Кубическое уравнение  $t^3 - 2018t + 1009 = 0$  имеет три различных действительных корня (так как для функции  $f(t) = t^3 - 2018t + 1009$  выполняются неравенства  $f(-100) < 0$ ,  $f(0) > 0$ ,  $f(20) < 0$ ,  $f(100) > 0$ ). Эти корни и будут числами  $x$ ,  $y$  и  $z$ . Поэтому по теореме Виета  $x + y + z = 0$ ,  $xy + yz + zx = -2018$ ,  $xyz = -1009$ . Искомая сумма

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{xy + yz + zx}{xyz} = 2.$$

3. 1,5.

Первое неравенство перепишем в виде

$$3^{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \geq 3^{2\sqrt{y}} + 2\sqrt{y} \Leftrightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(2\sqrt{y}),$$

где  $f(t) = 3^t + t$ . Так как функция  $f(t)$  возрастает при  $t \geq 0$ , то  $\sqrt{x} \geq 2\sqrt{y} \Leftrightarrow x \geq 4y \geq 0$ . Второе неравенство задает полосу  $-3 \leq x - y \leq 3 \Leftrightarrow x - 3 \leq y \leq x + 3$ . Искомая фигура есть треугольник с вершинами  $O(0; 0)$ ,  $B(3; 0)$  и  $A(4; 1)$ . Его площадь равна 1,5.

4.  $\frac{99}{203}$ .

Так как

$$\begin{aligned} \arctg \frac{n-1}{n^3-1} &= \arctg \frac{1}{n^2+n+1} = \arctg \frac{(n+1)-n}{1+n(n+1)} = \\ &= \arctg(n+1) - \arctg n, \end{aligned}$$

то

$$\begin{aligned} A &= \arctg \frac{2-1}{2^3-1} + \arctg \frac{3-1}{3^3-1} + \dots + \arctg \frac{100-1}{100^3-1} = \\ &= (\arctg 3 - \arctg 2) + (\arctg 4 - \arctg 3) + \dots \\ &\dots + (\arctg 101 - \arctg 100) = \arctg 101 - \arctg 2. \end{aligned}$$

Тогда

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} (\arctg 101 - \arctg 2) = \frac{101-2}{1+101 \cdot 2} = \frac{99}{203}.$$

5.  $14 + 2\sqrt{35}$  и  $10 + 2\sqrt{35}$ .

Если радиусы большего и меньшего оснований равны  $R$  и  $r$  соответственно,  $l = 12$  — длина образующей,  $x$  — длина продолжения образующей до целого конуса,  $\varphi = \alpha\pi = \frac{2\pi}{3}$  — заданный в условии центральный угол, то из подобия треугольников в осевом сечении получаем

$\frac{r}{x} = \frac{R}{x+l}$ , а из равенства длины окружности меньшего основания и меньшей дуги части кругового кольца следует  $x\varphi = 2\pi r$ . Подставив во второе равенство  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ , находим  $x = 3r$ . Теперь из первого равенства при  $l = 12$  и  $x = 3r$  получим  $R = r + 4$ .

Равенство данных в условии площадей дает уравнение

$$\begin{aligned} \pi R^2 + \pi r^2 + \frac{\varphi}{2}((x+l)^2 - x^2) &= \pi((x+l)^2 - x^2) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow R^2 + r^2 &= \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)(2x+l)l, \end{aligned}$$

откуда при наших значениях  $l$ ,  $x$  и  $R$  находим положительный корень  $r = 10 + 2\sqrt{35}$ . Тогда  $R = 14 + 2\sqrt{35}$ .

*Избранные задачи других вариантов*

1.  $x = 2$ .

Минимальное значение левой части совпадает с максимальным значением правой части.

2.  $[2; 5) \cup (11; +\infty)$ .

Так как  $x - 2 < x - 1$ , то  $\sqrt{x-2} - 3 < \sqrt{x-1} - 2$ . Поэтому при  $x \geq 2$  неравенство равносильно совокупности

$$\begin{cases} \sqrt{x-2} > 3, \\ \sqrt{x-1} < 2. \end{cases}$$

3.  $(-\infty; -12) \cup (-2; -1) \cup [2; 3) \cup [8; +\infty)$ .

При выполнении условий

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 \geq 0, \\ x^2 + 14x + 40 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \in (-\infty; -10] \cup [-4; -1] \cup [2; +\infty)$$

исходное неравенство равносильно

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x^2 + 14x + 40} - 2\sqrt{x^2 - x - 2}}{(\sqrt{x^2 - x - 2} - 2)(\sqrt{x^2 + 14x + 40} - 4)} \leq 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \frac{x^2 + 14x + 40 - 4(x^2 - x - 2)}{(x^2 - x - 6)(x^2 + 14x + 24)} \leq 0. \end{aligned}$$

4.  $\pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим,  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x + 3 \operatorname{ctg}^2 x \geq 2$ , причем равенство возможно только если  $\frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 x = 3 \operatorname{ctg}^2 x \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . С другой стороны,  $2 \cos^3 3x \leq 2$ , причем равенство возможно только если  $x = \frac{2\pi m}{3}$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ .

5. 20%; 0.

Пусть  $p, q, r$  ( $0 \leq p, q, r \leq 1$ ) – объемы малины в одном литре (процентное содержание) растворов в первой, второй и третьей бочках соответственно. Планы Незнайки означают, что

$$\begin{cases} p + 2q + 3r = 6 \cdot 0,1, \\ 5p + 4q + 3r = 12 \cdot 0,25. \end{cases}$$

Отсюда  $q = r = 0$ ,  $p = 0,6$ . Значит,  $p + q + r = 0,6 = 3 \cdot 0,2$ .

6. 2,1 млн руб.

Доля второго уменьшилась в 3 раза при неизменной его сумме денег, поэтому общая сумма увеличилась в 3 раза, а значит, первый внес еще 2 млн руб. Обозначив его общую сумму денег через  $x$  (млн руб.), получаем  $\frac{x}{3} = 7 \cdot \frac{x-2}{1} \Rightarrow x = 2,1$ .

7. 190 или 247.

Пусть в семеричной системе число записывается как  $\overline{abc}_7 = 49a + 7b + c$ , а в системе счисления с основанием 11 – как  $\overline{cba}_{11} = 121c + 11b + a$  ( $0 < a \leq 6$ ,  $0 \leq b < 6$ ,  $0 < c \leq 6$ ). Тогда  $49a + 7b + c = 121c + 11b + a \Leftrightarrow b = 6(2a - 5c)$ . Отсюда либо  $b = 6$ ,  $2a - 5c = 1$  (тогда  $c = 1$ ,  $a = 3$ ), либо  $b = 0$ ,  $2a - 5c = 0$  (тогда  $c = 2$ ,  $a = 5$ ).

8.  $(-3; -2) \cup (-2; 1) \cup (1; 2)$ .

После замены  $2^x = t > 0$  получаем квадратное относительно  $(a-1)$  уравнение

$$(a-1)^2 + 2t(a-1) - t^4 + 6t^3 - 8t^2 = 0$$

с корнями  $a-1 = t^2 - 4t$  и  $a-1 = -t^2 + 2t$ . Таким образом, задача сводится к нахождению таких  $a$ , для которых совокупность уравнений

$$\begin{cases} t^2 - 4t + 1 - a = 0, \\ t^2 - 2t - 1 + a = 0 \end{cases}$$

имеет ровно три положительных корня.

9.  $\frac{3\pi}{4}$ .

Так как

$$\cos^4 x + 1 \geq 2 \cos^2 x, \text{ а } 4 \cos^4 y + 1 \geq 4 \cos^2 y,$$

то

$$\begin{aligned} (\cos^4 x + 1)(4 \cos^4 y + 1) &\geq 8 \cos^2 x \cos^2 y \geq \\ &\geq 8 \cos^3 x \cos^2 y. \end{aligned}$$

Поэтому имеет место равенство как в первых двух неравенствах (отсюда  $\cos^4 x = 1$  и  $2 \cos^2 y = 1$ ), так и в последнем (отсюда  $\cos^2 x = \cos^3 x$ ). Значит,  $\cos x = 1$ ,  $\cos y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ ,

тогда  $x = 2\pi$ ,  $y = \frac{3\pi}{4}$  и  $y = \frac{5\pi}{4}$ . Наименьшее значение модуля разности:  $\frac{3\pi}{4}$ .

10.  $-2017,5$ .

Так как

$$\begin{aligned} f(n) + f\left(\frac{1}{n}\right) &= -\frac{n^2}{1+n^2} - \frac{1/n^2}{1+1/n^2} = \\ &= -\frac{n^2}{1+n^2} - \frac{1}{n^2+1} = -1, \end{aligned}$$

то исходная сумма равна

$$f(1) + \sum_{k=2}^{2018} \left( f(k) + f\left(\frac{1}{k}\right) \right) = -\frac{1}{1+1} - 2017 = -2017,5.$$

11.  $\frac{5\sqrt{15}}{4}$ .

Построим на  $AC$  такую точку  $D$ , что  $BD = DC$ . Тогда  $\triangle BDC$  – равнобедренный и  $\angle ABD = \angle ABC - \angle ACB$ . Обозначив  $BD = DC = x$ , получим  $AD = 5 - x$ . Из теоремы косинусов в  $\triangle ABD$  получим

$$(5-x)^2 = 4^2 + x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x \cdot \cos \angle ABD \Leftrightarrow x = 2.$$

Теперь в  $\triangle ABD$  известны все стороны, и его площадь находится по формуле Герона:

$$S_{ABD} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2}} = \frac{3\sqrt{15}}{4}.$$

$$S_{ABC} = S_{ABD} \cdot \frac{AC}{AD} = \frac{3\sqrt{15}}{4} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5\sqrt{15}}{4}.$$

12. а)  $30^\circ$  и  $20^\circ$ ; б)  $\sqrt{3}$ .

а) Точка  $B$  определяется точками  $A, C, D$  однозначно (из нее оба отрезка  $AD, CD$  видны под углом  $40^\circ$ ), причем заведомо гонится такая точка  $B$ , что окружность с центром  $D$ , касающаяся стороны  $AC$ , вписана в угол  $ABC$  (т.е. вписана в треугольник  $ABC$ ). Значит, это и есть та самая точка. Следовательно,  $\angle BAD = \angle CAD = 30^\circ$  и  $\angle BCD = \angle ACD = 20^\circ$ .

б) Радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $ABC$ , равен  $\frac{BC}{2 \sin 60^\circ} = \sqrt{3}$ . Но  $\angle BDC = 180^\circ - 40^\circ - 20^\circ = 120^\circ$ , поэтому радиус окружности, описанной вокруг треугольника  $BCD$ , также равен  $\frac{BC}{2 \sin 120^\circ} = \sqrt{3}$ . Значит, их общая хорда  $BC$  пересекает отрезок между центрами в его середине, а длина этого отрезка равна  $2\sqrt{3 - \frac{9}{4}} = \sqrt{3}$ .

## Ф И З И К А

### Отборочный этап

Часть 1

1.  $v = 0$ .

2.  $Q = 2R\Delta T = 2(1,3^2 - 1)RT = 2294$  Дж.

3.  $\frac{P_D}{P_R} = 29$ .

Часть II

1. Рассмотрим два луча, падающих от крайней точки наблюдаемого объекта на линзу (рис.5).

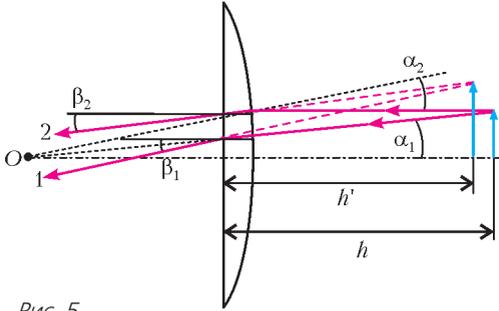


Рис. 5

Первый луч идет по радиусу сферической поверхности линзы. Он не преломляется на сферической поверхности линзы и падает под углом  $\alpha_1 = \frac{l}{R+h}$  на ее плоскую поверхность. Здесь  $l$  – размер объекта, а  $R$  – радиус сферической поверхности (считаем все углы малыми, а толщиной линзы пренебрегаем). После преломления на границе раздела стекло–воздух этот луч будет направлен под углом  $\beta_1 = n_l \alpha_1 = \frac{n_l l}{R+h}$  к главной оптической оси линзы. Второй луч идет параллельно главной оптической оси линзы, падает на сферическую поверхность под углом  $\alpha_2 = \frac{l}{R}$  и после преломления на границе раздела вода–стекло идет под углом  $\alpha'_2 = \frac{l}{R} - \frac{n}{n_l} \frac{l}{R} = \frac{n_l - n}{n_l} \frac{l}{R}$  к главной оптической оси. После преломления на плоской поверхности этот угол станет равным  $\beta_2 = n_l \alpha'_2 = \frac{(n_l - n)l}{R}$ .

Численный анализ позволяет заметить, что  $\beta_1 > \beta_2$  и поэтому пересекаются продолжения этих лучей (т.е. изображение объекта – мнимое). Обозначив  $h'$  расстояние от линзы до изображения, запишем два выражения для величины изображения:  $l' = \frac{Rl}{R+h} + \beta_1 h' = l + \beta_2 h'$ , откуда находим  $h' = \frac{Rl}{nR - (n_l - n)h}$ . Подставляя это значение во второе выражение, определяем размер изображения:

$$l' = l \left( 1 + \frac{(n_l - n)h}{nR - (n_l - n)h} \right) = l \frac{nR}{nR - (n_l - n)h}.$$

Следовательно, увеличение изображения равно  $\Gamma = \frac{l'}{l} = \frac{nR}{nR - (n_l - n)h}$ . Отметим, что для плос-

ко-выпуклой линзы с показателем преломления стекла  $n_l$  фокусное расстояние в воздухе равно  $F = \frac{R}{n_l - 1}$ , откуда  $R = (n_l - 1)F$ . Поэтому окончательно получаем

$$\Gamma = \frac{l'}{l} = \frac{n(n_l - 1)F}{n(n_l - 1)F - (n_l - n)h} = 7,7.$$

2. Везде в решении будем считать тепловые удлинения пластин очень малыми (по сравнению с  $L$ ), а изменениями поперечных размеров пренебрежем. Изгиб биметаллической пластины является из-за того, что коэффициенты теплового расширения составляющих ее пластин различаются и при нагреве длины пластин перестают быть равными. Однако из-за прочной сварки длина пластин по линии сварки должна остаться одинаковой. В результате пластина с меньшим коэффициентом  $\alpha$ , пусть для определенности  $\alpha_1 < \alpha_2$ , оказывается в растянутом состоянии, а с большим – в сжатом, и возникает изгибающий момент сил упругости. В условии сказано, что пластины изгибаются по дуге окружности. Пусть  $R$  – радиус кривизны поверхности спайки, а  $\tilde{L}$  – ее длина в состоянии равновесия при температуре  $t$ . Тогда угловой размер изогнутой пластины  $\varphi = \tilde{L}/R$  (рис. 6), длина сред-

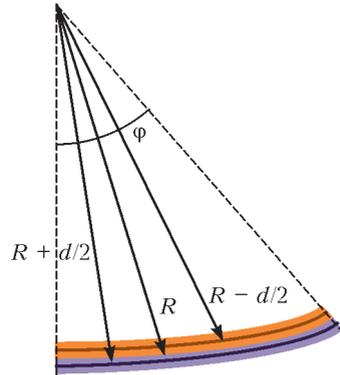


Рис. 6

ней линии первой пластины в состоянии равновесия  $L_1 = \varphi \left( R - \frac{d}{2} \right) = \tilde{L} \left( 1 - \frac{d}{2R} \right)$ , а второй  $L_2 = \tilde{L} \left( 1 + \frac{d}{2R} \right)$ . Деформации пластин равны разности этих длин и ненапряженной длины каждой пластины:

$$\Delta L_1 = \tilde{L} \left( 1 - \frac{d}{2R} \right) - L(1 + \alpha_1 t) > 0,$$

$$\Delta L_2 = \tilde{L} \left( 1 + \frac{d}{2R} \right) - L(1 + \alpha_2 t) < 0.$$

Равновесная длина поверхности спайки опреде-

ляется из условия уравнивания сил упругости:  $k_1\Delta L_1 + k_2\Delta L_2 = 0$ , где жесткости пластин выражаются через модули Юнга и их размеры:  $k_{1,2} = E_{1,2} \frac{Dd}{L}$ . Таким образом, из условия равновесия сил находим

$$\tilde{L} = \frac{E_1(1 + \alpha_1 t) + E_2(1 + \alpha_2 t)}{E_1(1 - d/(2R)) + E_2(1 + d/(2R))} L.$$

Это позволяет найти величину сил упругости:

$$|F_1| = k_1 |\Delta L_1| = \frac{E_1 E_2 ((\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R) Dd}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/(2R)},$$

$$|F_2| = |F_1|.$$

Отсюда видно, что при ненапряженном изгибе ( $|F_{1,2}| = 0$ ) радиус изгиба удовлетворяет соотношению  $\frac{d}{R} = (\alpha_2 - \alpha_1)t$ , но такое выражение не учитывает упругие свойства пластин, и этот результат может считаться «простой» оценкой для радиуса изгиба. Конечно, в реальном случае  $|F_{1,2}| > 0$  и поэтому  $\frac{d}{R} < (\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$ .

Две силы упругости создают изгибающий момент сил, равный

$$M_{\text{изг}} = |F_1|d = \frac{E_1 E_2 ((\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R) Dd^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/(2R)}.$$

Рассмотрим теперь тонкий поперечный слой первой пластины толщиной  $\Delta L$  с угловым размером  $\Delta\phi = \Delta L/R$  (рис.7). Средняя деформация этой пластины вычислена для средней линии, но в действительности наружные по отношению к изгибу слои растянуты сильнее, чем внутренние. Если ввести координату  $x$ , отсчитываемую поперек пластины, то изменение деформации по сравнению со средней линией равно  $\delta L = x \Delta\phi = x \Delta L/R$ . Поэтому изменения сил упругости в каждом слое толщиной  $dx$  равны (поскольку жесткость  $dk = E_1 D dx/\Delta L$ )

$$dF = \frac{E_1 D dx}{\Delta L} \delta L = \frac{E_1 D}{R} x dx.$$

Эти изменения создают вклад в момент сил упругости, противоположный изгибающему моменту сил, и в состоянии равновесия они в точности компенсируют друг друга. Полный вклад в момент первой пластины вычисляется через интег-

рирование:

$$M_1 = \int_{-d/2}^{+d/2} x dF = \frac{E_1 D}{R} \int_{-d/2}^{+d/2} x^2 dx = \frac{E_1 D d^3}{12R}.$$

(Участникам, не знакомым с интегрированием, пришлось бы исходить из того, что

$$M_1 = \sum x \Delta F = \frac{E_1 D}{R} \sum x^2 \Delta x, \text{ а при суммировании малых вкладов } x^2 \Delta x = \Delta \left( \frac{x^3}{3} \right) \text{ и тогда}$$

$$\sum x^2 \Delta x = \sum \Delta \left( \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{d}{2} \right)^3 - \left( -\frac{d}{2} \right)^3 \right) = \frac{d^3}{12}.)$$

Аналогично, вклад второй пластины равен

$$M_2 = \frac{E_2 D d^3}{12R},$$

и условие равновесия  $M_{\text{изг}} = M_1 + M_2$  позволяет определить радиус кривизны. Это условие приводит к уравнению

$$\frac{E_1 E_2 ((\alpha_2 - \alpha_1)t - d/R) Dd^2}{E_1 + E_2 + (E_2 - E_1)d/(2R)} = \frac{(E_1 + E_2) Dd^3}{12R},$$

или

$$\frac{12E_1 E_2}{(E_1 + E_2)^2} \left( (\alpha_2 - \alpha_1)t - \frac{d}{R} \right) = \frac{d}{R} \left( 1 + \frac{E_2 - E_1}{E_1 + E_2} \frac{d}{2R} \right).$$

Решая это квадратное уравнение относительно  $d/R$ , находим положительный корень, равный нулю при  $t = 0^\circ\text{C}$ . Например, при  $E_2 > E_1$  это  $\frac{d}{R} = -A + \sqrt{A^2 + B}$ , где

$$A = \frac{12E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2}{E_2^2 - E_1^2}, B = \frac{24E_1 E_2 (\alpha_2 - \alpha_1)t}{E_2^2 - E_1^2}.$$

Здесь следует отметить, что коэффициенты теплового расширения большинства металлов порядка  $10^{-5} \text{K}^{-1}$ . Поэтому даже для температур  $\sim 100^\circ\text{C}$  величина  $(\alpha_2 - \alpha_1)t$  порядка  $10^{-3}$ . Считая модули Юнга материалами величинами одного порядка, а  $(\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$ , получим

$$\frac{d}{R} = \frac{12E_1 E_2}{12E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2} (\alpha_2 - \alpha_1)t$$

(для  $E_2 < E_1$  получается такое же выражение). Как мы и ожидали, равновесное значение  $d/R < (\alpha_2 - \alpha_1)t \ll 1$ .

Итак, радиус кривизны линии спайки удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{R(t)} = \frac{12E_1 E_2}{12E_1 E_2 + (E_1 + E_2)^2} \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)t}{d}.$$

Напомним, что угол изгиба пластины  $\phi = \frac{\tilde{L}}{R}$ . Если отсчитывать  $h$  от плоскости спайки (как было показано на рисунке в условии), то контакт достигается, если  $h - d = R(1 - \cos(\tilde{L}/R))$ .

Здесь предполагается, что параметры пластины подобраны таким образом, чтобы выполнялось требование  $\varphi < \pi$  (при  $\varphi \geq \pi$  пластина «сворачивается» и  $h$  практически перестает расти при дальнейшем изгибе, что неудобно для конструирования датчика). Заметим также, что отличие

$$\tilde{L} \text{ от } L \text{ очень мало: } \tilde{L} = L \left( 1 + \frac{\alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2}{E_1 + E_2} t \right) \text{ и в}$$

рамках используемой точности им можно пренебречь. Тогда  $h(t) = d + R(t)(1 - \cos(L/R(t)))$ . На самом деле удобнее всего подобрать параметры так, чтобы выполнялись соотношения  $h \gg d$  и  $\varphi \ll 1$  (например,  $L = 100d$  и  $(\alpha_2 - \alpha_1)t = 0,001$ ). Тогда «калибровочная зависимость» датчика имеет наиболее простой и удобный линейный вид:

$$h(t) = \frac{L^2}{2R(t)} = \frac{6E_1E_2(\alpha_2 - \alpha_1)L^2}{(12E_1E_2 + (E_1 + E_2)^2)d} t.$$

**3.** Докажем сначала следующее утверждение: вектор напряженности электростатического поля  $\vec{E}$ , созданного равномерно заряженным с плотностью  $\lambda$  отрезком  $MN$  в точке  $K$ , не лежащей на прямой  $MN$ , равен вектору напряженности  $\vec{E}'$ , создаваемому равномерно заряженной с той же плотностью  $\lambda$  дугой  $M'N'$  окружности радиусом  $KH$  с центром  $K$  (рис. 8). Непосредственный расчет доказывает это утверждение.

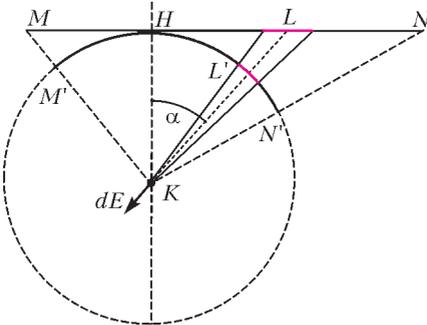


Рис. 8

Действительно, для бесконечно малого элемента  $dl$  отрезка  $MN$ , расположенного в точке  $L$ , имеем следующее выражение для проекции электростатического поля  $\vec{E}$  на направление от этого элемента к точке  $K$ :

$$dE = \frac{k dq}{R^2} = \frac{k \lambda dl}{R^2},$$

где  $R = KL$ . Для соответствующего малого элемента  $d'l'$  дуги  $M'N'$  аналогично находим

$$dE' = \frac{k dq'}{r^2} = \frac{k \lambda dl'}{r^2}, \text{ где } r = KH - \text{ радиус кривизны дуги.}$$

Учитывая соотношения  $d'l' = \frac{r}{R} dl \cos \alpha$  и  $r = R \cos \alpha$ , получим

$$dE' = \frac{k \lambda}{(R \cos \alpha)^2} \frac{R \cos \alpha}{R} dl \cos \alpha = \frac{k \lambda dl}{R^2} = dE.$$

Направления этих векторов совпадают, поэтому  $\vec{dE}' = \vec{dE}$ . Таким образом, поля, созданные малыми элементами  $dl$  и  $d'l'$ , равны друг другу. Суммируя поля всех малых элементов отрезка  $MN$  и дуги  $M'N'$ , получаем равенство созданных ими полей:  $\vec{E}' = \vec{E}$ , т.е. наше утверждение доказано. Отсюда сразу же следует, что поле равномерно заряженного отрезка направлено вдоль биссектрисы угла  $MKN$ .

Теперь заметим, что в данном в условии четырехугольнике суммы длин противоположных сторон равны, следовательно, существует вписанная в него окружность. Согласно доказанному утверждению, при расчете поля в центре  $O$  каждую сторону четырехугольника можно заменить соответствующей дугой вписанной окружности. Сделав это, убеждаемся, что поле четырехугольника в точке  $O$  равно полю вписанной в него окружности в ее центре, а из соображений симметрии ясно, что поле в центре равномерно заряженной окружности равно нулю. Таким образом, требуемая точка – это центр вписанной окружности. Расстояние от этой точки до всех сторон четырехугольника равно радиусу вписанной окружности, который можно найти как отношение площади четырехугольника к его полупериметру:  $r = \frac{2S}{p} = 1,54$  см. Кроме того, понятно, что для любого равномерно заряженного по периметру выпуклого многоугольника, у которого существует вписанная окружность, центр этой окружности – это точка, в которой напряженность электростатического поля равна нулю. Поэтому в качестве примера подойдет любой выпуклый четырехугольник, у которого суммы длин противоположных сторон равны. Вместе с тем, можно найти и другие примеры. Так, такая точка очевидно существует у любого прямоугольника – это его центр.

**4.** Формулу, с хорошей точностью описывающую сигнал, можно представить как сумму гармонических колебаний, воспользовавшись тригонометрической формулой

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) - \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta).$$

Тогда

$$\bar{x}(t) = \frac{A}{2} \cos\left(\frac{12\pi}{7T} t\right) - \frac{A}{2} \cos\left(\frac{16\pi}{7T} t\right).$$

Так как периоды этих колебаний порядка десят-

ка миллисекунд, к середине сигнала длительностью 900 с пройдет несколько десятков тысяч периодов колебаний. Следовательно, возбужденные включением сигнала собственные колебания груза к этому моменту практически затухнут и наблюдаемую часть сигнала необходимо рассматривать как вынужденные колебания под действием периодической силы. Вынужденные колебания происходят с частотой вынуждающей силы, поэтому частоты гармонических составляющих предполагаемого сигнала это

$$\nu_1 = \frac{6}{7T} \approx (107,14 \pm 0,14) \text{ Гц и}$$

$$\nu_2 = \frac{8}{7T} \approx (142,86 \pm 0,18) \text{ Гц .}$$

В этих значениях сохранен один лишний разряд, чтобы уменьшить потери точности при округлении.

Пренебрегая диссипативными силами на интервалах времен порядка нескольких периодов колебаний, запишем уравнение колебаний под действием одной вертикальной гармонической составляющей (координата  $x$  – отклонение груза по вертикали от положения равновесия):  $m a_x = -kx + mg_m \cos \omega t$ . Здесь  $m$  и  $k$  – масса груза и жесткость пружины, а начало отсчета времени выбрано так, чтобы начальная фаза колебаний гравитационного поля равнялась нулю. Поскольку ускорение есть вторая производная координаты по времени:  $a_x = x''_t$ , получим уравнение вынужденных гармонических колебаний  $x''_t + \omega_0^2 x = g_m \cos \omega t$ , где  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$ . Если искать его решение в виде колебаний на частоте вынуждающей силы:  $x(t) = x_m \cos \omega t$ , то можно установить связь амплитуды сигнала с амплитудой вынужденных колебаний груза:

$x_m = \frac{g_m}{\omega_0^2 - \omega^2}$ . В нашем случае оказалось, что амплитуды колебаний под действием двух гармонических компонент сигнала совпали по величине и при этом эти колебания происходили в противофазе. Это означает, что сигналы имели сдвиг по фазе на  $\pi$ , причем  $\frac{A}{2} = \frac{g_{m1}}{\omega_1^2 - \omega_0^2} = \frac{g_{m2}}{\omega_2^2 - \omega_0^2}$ . Отметим также, что нам с высокой точностью известна величина  $\Delta l_0 = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega_0^2}$ , откуда  $\omega_0^2 = \frac{g}{\Delta l_0}$ . Эти соотношения позволяют нам найти амплитуды сигналов. Заметим, что нам неизвестно расположение лаборатории профессора Челленджера, поэтому мы будем вынуждены использовать значение ускорения свободного падения  $g \approx (9,81 \pm 0,03) \text{ м/с}^2$  (этот интервал вмещает в себя значения практически для всей поверхности

Земли). В этом случае

$$g_{m1} = \frac{gA}{2\Delta l_0} \left( \frac{\Delta l_0 \omega_1^2}{g} - 1 \right) \approx \\ \approx (11,5 \pm 0,3) g \approx (113 \pm 3) \text{ м/с}^2 ,$$

$$g_{m2} = \frac{gA}{2\Delta l_0} \left( \frac{\Delta l_0 \omega_2^2}{g} - 1 \right) \approx \\ \approx (20,5 \pm 0,5) g \approx (201 \pm 5) \text{ м/с}^2 .$$

На самом деле основной вклад в погрешность вносит ошибка в определении  $A$  – около 2%, а соотношение  $\omega_0^2/\omega_{1,2}^2$  дает ошибку порядка нескольких сотых процента. Поэтому можно было обойтись и без использования ускорения свободного падения (оно потребовалось только для оценки  $\omega_0$ ), что даже немного повысит точность:

$$g_{m1} = \frac{A}{2} \omega_1^2 \approx (113,3 \pm 2,3) \text{ м/с}^2 ,$$

$$g_{m2} = \frac{A}{2} \omega_2^2 \approx (201,4 \pm 4,2) \text{ м/с}^2 .$$

Осталось заключить, что сформулированное в условии предположение нереалистично.

### Заключительный этап

#### Вариант 1

#### ЗАДАНИЕ 1

**Вопрос.** Кинетическая энергия гантели в этом случае есть сумма энергий поступательного движения ( $2 \frac{mv^2}{2} = mv^2$ ) и вращательного движения ( $2 \frac{mv_{вр}^2}{2} = \frac{m\omega^2 L^2}{4}$ ), поэтому

$$E_k = m \left( v^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4} \right) .$$

**Задача.** Поскольку линия удара (линия действия сил взаимодействия шариков во время удара) не проходит через центр масс гантели, то после соударения она начнет вращаться. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление начального движения:  $mv_0 = 2mV - mv$ , где  $m$  – масса каждого шарика,  $V$  – скорость поступательного движения гантели,  $v$  – скорость налетающего шарика после соударения. Отсюда  $v = 2V - v_0$ . Рассмотрим движение гантели после удара как движение центра масс со скоростью  $V$  и вращение вокруг него с угловой скоростью  $\omega$ . Сила, действующая на второй шарик гантели, т.е. на тот, по которому не наносит удар налетающий шарик, это сила упругости жесткого стержня, направленная вдоль стержня. Поэтому его скорость сразу после удара направлена вдоль стержня и

является суммой скорости центра масс и скорости вращения:  $\vec{v}_2 = \vec{V} + \vec{v}_{вр}$ , последняя перпендикулярна радиусу вращения и по величине равна  $v_{вр} = \omega r_2$ , где  $r_2 = \frac{L}{2}$ . При этом из векторного треугольника скоростей видно, что  $\omega r_2 = \omega \frac{L}{2} = V \sin \alpha$ , откуда  $\omega = \frac{2V}{L} \sin \alpha = \frac{V}{L}$ . Следовательно, закон сохранения энергии записывается в виде

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + m \left( V^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4} \right).$$

Для скорости центра масс гантели получается уравнение  $13V^2 - 8Vv_0 = 0$ , ненулевой корень которого есть  $V = \frac{8}{13}v_0$ . Таким образом,

$$\omega = \frac{8}{13} \frac{v_0}{L}.$$

## ЗАДАНИЕ 2

**Вопрос.** В изотермическом процессе  $pV = \text{const}$ , поэтому

$$\Delta(pV) = p\Delta V + V\Delta p,$$

откуда для угла наклона изотермы в точке  $K$  получим

$$\left( \frac{\Delta p}{\Delta V} \right)_K = -\frac{p_K}{V_K} = -\text{tg}\alpha.$$

В адиабатическом процессе

$$\delta Q = p\Delta V + \frac{3}{2}\Delta(pV) = \frac{5}{2}p\Delta V + \frac{3}{2}V\Delta p = 0,$$

поэтому угол наклона адиабаты  $\beta$  в точке  $K$  определяется из соотношения

$$\text{tg}\beta = -\left( \frac{\Delta p}{\Delta V} \right)_K = \frac{5}{3} \frac{p_K}{V_K} = \frac{5}{3} \text{tg}\alpha.$$

Значит,

$$\beta = \text{arctg} \left( \frac{5}{3} \text{tg}\alpha \right).$$

**Задача.** Как видно из диаграммы, на всем участке 1–2 гелий получает тепло, а при изохорном охлаждении – отдает. Поэтому  $Q_{12} = Q_{12}$ , а  $Q_x = -Q_{23}$ . Рассмотрим процесс 1–2. По условию,  $V_2 = \frac{5}{2}V_1$ . Кроме того, в соответствии с ответом на вопрос этого задания,

$$\text{tg}\beta = \frac{5}{3} \frac{p_2}{V_2} = \frac{p_1 - p_2}{V_2 - V_1}, \text{ или}$$

$$\frac{3(p_1 - p_2)}{p_2} = \frac{5(V_2 - V_1)}{V_2}, \text{ и } p_2 = \frac{p_1}{2}.$$

Тогда

$$Q_{12} = \frac{p_1 + p_2}{2}(V_2 - V_1) + \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_1V_1) = \frac{3}{2}p_1V_1.$$

Согласно уравнению адиабаты,  $p_3 = \left( \frac{2}{3} \right)^{5/3} p_1$ , следовательно,

$$Q_x = \frac{3}{2}(p_2V_2 - p_3V_3) = \frac{15}{8} \left( 1 - \frac{4}{5} \left( \frac{2}{5} \right)^{2/3} \right) p_1V_1.$$

Таким образом, КПД цикла равен

$$\eta = 1 - \frac{Q_x}{Q_{12}} = \left( \frac{2}{5} \right)^{2/3} - \frac{1}{4} \approx 0,29.$$

## ЗАДАНИЕ 3

**Вопрос.** Так как конденсатор отключен от источника, то его заряд сохраняется. При этом ему энергетически выгодно увеличивать свою емкость (энергия  $W = \frac{q^2}{2C}$ ), т.е. втягивать в себя пластинку. Поэтому пластинка начнет втягиваться в конденсатор и набирать скорость, проскочит по инерции положение равновесия и продолжит движение далее, но – после достижения другого края конденсатора – уже с торможением (теперь емкость убывает, а энергия растет). При наличии потерь энергии (трение, переполяризация диэлектрика, излучение) возникнут медленно затухающие колебания пластинки.

**Задача.** После замыкания ключа  $K_1$  конденсатор емкостью  $C$  заряжается до напряжения, равного ЭДС источника, т.е.  $q = C\varepsilon$ . После размыкания ключа  $K_2$  баланс напряжений не нарушается – напряжение на конденсаторе емкостью  $2C$  (и его заряд) остается равным нулю. В результате заполнения первого конденсатора диэлектриком его емкость увеличивается до  $\varepsilon C$  и батарея конденсаторов дозарядается. Обозначим  $\Delta q$  заряд, перемещенный источником в процессе дозарядки. Тогда новый заряд конденсатора емкостью  $\varepsilon C$  будет  $q + \Delta q$ , а заряд конденсатора емкостью  $2C$  станет  $\Delta q$ . Из условия баланса напряжений  $\frac{q + \Delta q}{\varepsilon C} + \frac{\Delta q}{2C} = \frac{q}{C}$  находим

$$\Delta q = \frac{2(\varepsilon - 1)}{\varepsilon + 2} q = 4 \text{ мкКл}.$$

## ЗАДАНИЕ 4

**Вопрос.** После прохождения первой (собирающей) линзы пучок станет сходящимся – лучи будут направлены в точку, лежащую в фокальной плоскости первой линзы. Эта точка будет

играть роль точечного источника для второй (рассеивающей) линзы. Пучок лучей, выходящих из второй линзы, будет параллельным, если эта точка будет находиться в фокальной плоскости и второй линзы тоже. С учетом того, что фокусное расстояние второй линзы по модулю меньше, чем у первой, расстояние между линзами должно равняться разности модулей фокусных расстояний линз:

$$L = F_1 - |F_2| = \frac{1}{D_1} - \frac{1}{|D_2|} = 30 \text{ см.}$$

**Задача.** В качестве первого шага получим общее соотношение, связывающее параметры системы из двух тонких линз, имеющих общую оптическую ось, с расстояниями до источника и изображения. Пусть  $F_1$  и  $F_2$  – фокусные расстояния линз,  $L$  – расстояние между ними,  $d_{1,2}$  – расстояния до источников от каждой из линз,  $f_{1,2}$  – расстояния до изображений. Расстояние от источника до системы есть расстояние до первой линзы. Изображение, создаваемое этой линзой, находится от нее на расстоянии, определяемом формулой линзы:

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F_1}, \text{ и } f_1 = \frac{d_1 F_1}{d_1 - F_1}.$$

Это изображение является источником для второй линзы:

$$d_2 = L - f_1 = \frac{Ld_1 - F_1(L + d_1)}{d_1 - F_1}.$$

Вторично применяя формулу линзы, найдем

$$f_2 = \frac{d_2 F_2}{d_2 - F_2} = \frac{F_2(Ld_1 - F_1(L + d_1))}{Ld_1 - F_1(L + d_1) - F_2 d_1 + F_1 F_2},$$

или

$$(L + d_1 + f_2)F_1 F_2 - (L + d_1)f_2 F_1 - (L + f_2)d_1 F_2 + Ld_1 f_2 = 0.$$

Теперь запишем это соотношение для двух ситуаций, описанных в условии задачи, обозначив фокусное расстояние собирающей линзы  $F_1$  (т.е. считаем  $F_1 > 0$  и  $F_2 < 0$ ):

$$5F_1 F_2 - 4LF_1 - 6LF_2 + 3L^2 = 0,$$

$$\frac{19}{3}F_1 F_2 - 10LF_1 - \frac{28}{3}LF_2 + 7L^2 = 0.$$

Получена система двух уравнений относительно двух неизвестных  $F_1$  и  $F_2$ . Она имеет два решения:

$$F_1 = L, \quad F_2 = -L \quad \text{и} \quad F_1 = 21L/37, \quad F_2 = 3L/13.$$

Поскольку условию задачи удовлетворяет только первое из них, оно и дает правильный ответ.

## ВНИМАНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ И АВТОРОВ НАШЕГО ЖУРНАЛА!

Начиная с этого года, некоторым статьям журнала «Квант» присваивается принятый в научной среде цифровой идентификатор публикаций – DOI (Digital Object Identifier). По присвоенному (раз и навсегда) данной статье идентификатору можно получить информацию о ней в базах данных, в частности – в интернете.

Посылая в редакцию нашего журнала статью, просим авторов сообщать о себе, кроме фамилии, имени и отчества, также место работы, занимаемую должность и электронный адрес.

Подписаться на наш журнал можно с любого номера в любом почтовом отделении связи. Наш подписной индекс в каталоге «Пресса России» – 90964.

Архив вышедших номеров журнала «Квант» можно найти на сайте <http://kvant.ras.ru>

# КВАНТ 12+

## НОМЕР ПОДГОТОВИЛИ

**Е.В.Бакаев, Е.М.Епифанов,  
А.Ю.Котова, С.Л.Кузнецов,  
В.А.Тихомирова, А.И.Черноуцан**

## НОМЕР ОФОРМИЛИ

**В.Н.Власов, Д.Н.Гришукова,  
А.Е.Пацхверия, М.Н.Сумнина**

## ХУДОЖЕСТВЕННЫЙ РЕДАКТОР

**Е.В.Морозова**

## КОМПЬЮТЕРНАЯ ГРУППА

**М.Н.Грицук, Е.А.Митченко**

**Журнал «Квант» зарегистрирован**

**в Комитете РФ по печати.**

**Рег. св-во ПИ №ФС77-54256**

**Тираж: 1-й завод 900 экз. Заказ №**

**Адрес редакции:**

**119296 Москва, Ленинский проспект, 64-А,  
«Квант»**

**Тел.: +7 916 168-64-74**

**E-mail: [math@kvant.ras.ru](mailto:math@kvant.ras.ru), [phys@kvant.ras.ru](mailto:phys@kvant.ras.ru)**

**Отпечатано**

**в соответствии с предоставленными  
материалами**

**в типографии ООО «ТДДС-СТОЛИЦА-8»**

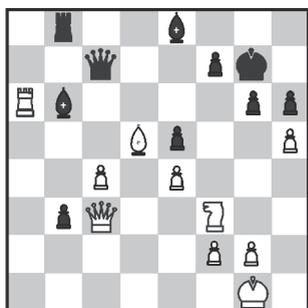
**Телефон: +7 495 363-48-86,**

**<http://capitalpress.ru>**

## Когда двуХ ФЕРЗЕЙ МАЛО

В шахматах крайне редки ситуации, при которых на доске находятся более двух ферзей одновременно: в партиях с классическим контролем появление у одной из сторон дополнительного ферзя практически всегда означает немедленную победу. В сегодняшнем выпуске мы рассмотрим гроссмейстерские поединки, в которых наличие двух ферзей у одной из сторон не только не гарантировало выигрыш, но в некоторых случаях было недостаточно даже для ничьей.

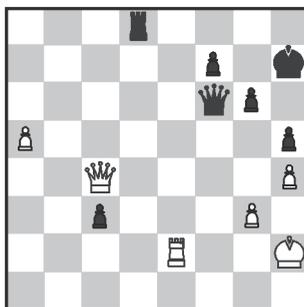
**В.Моисеенко – Е.Алексеев**  
Сочи, 2017



К такой позиции пришла партия, сыгранная на чемпионате России 2017 года, после 38 хода белых. **38... ♗d4 39. ♘d4 b2!** Планы черных связаны с проходной пешкой (пассивное 39...ed ведет к поражению после 40. ♖d4+ ♗h7 41. hg+ fg 42. ♗a7 с выигрышем ферзя). **40. ♗g6+ ♗f8!** Единственный ход (проигрывает как 40...fg? 41. ♗e6+ ♗h7 42. ♗c7 b1 ♗ 43. ♗h2!, так и 40...♗h7? 41. ♗h6+! ♗h6 42. ♗f5+ ♗h7 43. ♗g3 b1 ♗+ 44. ♗h2 f6 45. ♗g8×!) **41. ♗a3+ ♗e7 42. ♗f5+!!** Ошеломительный ход. Белые не только не мешают черным создать второго ферзя, но и жертвуют единственного своего. **42... b1 ♗+ 43. ♗h2 ♗a3 44. ♗h6!** Несмотря на двух лишних ферзей, черные не мо-

гут выиграть из-за угрозы мата их королю. **44... ♗g1+ 45. ♗g1 ♗c1+ 46. ♗h2.** Черные пожертвовали одного ферзя, однако разрушить матовую конструкцию можно только отдав ферзя за ладью на h6, после чего шансы на победу будут выше уже у белых. Поэтому черные вынуждены согласиться на повторение ходов: **46... ♗f4+ 47. g3 ♗f2+ 48. ♗h3 ♗g8 49. ♗g6+ ♗f8 50. ♗h6 ♗f1+ 51. ♗h4 ♗h1+ 52. ♗g4 ♗d1+ 53. ♗h4 ♗h1+.** Ничья

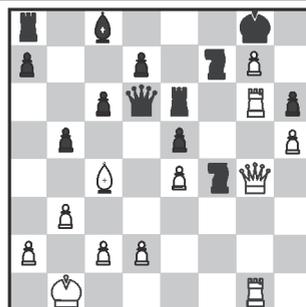
**Х.-Р.Капабланка – А.Алекин**  
Буэнос-Айрес, 1927



Одна из самых известных партий, в которых сразу у обоих соперников возникло по дополнительному ферзю, была сыграна в матче на первенство мира между Х.-Р.Капабланкой и А.Алекиным. Игравший белыми кубинец неправильно оценил позицию, возникшую после 60 хода (на диаграмме), и сходил **61. a6?** (шансы на спасение оставляло 61. ♗g2! ♗g7 62. a6 ♗d1 63. ♗f2 ♗d2 64. ♗d2 cd 65. ♗d5 ♗b2 66. ♗h3). Появление лишней пары ферзей выгодно черным, так как открытое положение белого короля позволяет поставить ему мат: **61... ♗f1! 62. ♗e4 ♗d2! 63. ♗d2 cd 64. a7 d1 ♗ 65. a8 ♗ ♗g1+ 66. ♗h3 ♗df1+ 67. ♗g2 ♗h1×.**

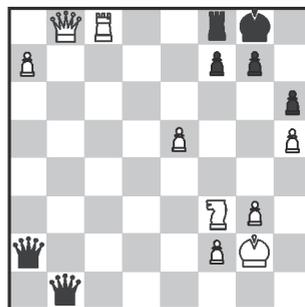
**Р.Тейхман – NN**  
Цюрих, 1921

Данная позиция, возникшая в партии Р. Тейхмана против не-



известного любителя, долгое время трактовалась как выигрышная за белых, пока в 1980 году М. Дворецкий не нашел способ защиты за черных: **1. ♗h6! ♗h6 (1... ♗h6 2. ♗f7+ ♗f7 3. g8 ♗) 2. ♗g5 ♗f7 3. ♗d8!! ♗d8 4. h6!** В этой позиции черные сдались, хотя могли продолжать борьбу даже против двух белых ферзей: **4... ♗d4! 5. h7+ ♗f7 6. g8 ♗+ ♗e7 7. h8 ♗ ♗d6!** Черный король находит укрытие на ферзевом фланге. **8. ♗g7 ♗d2 9. ♗f8+ ♗c7 10. ♗d8+ ♗b7 11. ♗e6 ♗d1+ 12. ♗b2 ♗d4+** с вечным шахом.

**В.Крамник – Д.Хауэлл**  
Лондон, 2011



Преждевременно сдаваться могут не только любители: в позиции на диаграмме признал свое поражение английский гроссмейстер Д.Хауэлл. Жертва одного ферзя могла позволить ему продолжить борьбу: **1... ♗f1+! 2. ♗f1 ♗a6+ 3. ♗g2 ♗c8,** и для белых пришлось бы приложить еще немало усилий, чтобы отпраздновать победу.

*А.Русанов*

# Невероятно-но факт



МАЛЕНЬКИЙ ЗЕЛЕНЬ ПОВЕГ ВЫРОС ПОЧТИ  
НА ЛОВОВОМ СТЕКЛЕ АВТОМОБИЛЯ.  
КАК ЕМУ ЭТО УДАЛОСЬ?



*Уроженки с физикой*



(Подробнее – на с. 49 внутри журнала)